5. Vektoralgebra

5.1. Elementare Rechenregeln

- diskutieren grundlegende Konzept des Vektorraums anhand des anschaulichen "physik." dreidim. Raumes $\mathbb{R}^3$

- im Physik → Eigenschaften klassifiziert durch

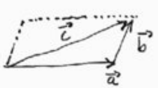
a) Skalare: Größen (Zahlenangabe) (wie Temperatur oder Masse) die nur durch eine Angabe (reelle Zahl) + phys. Einheit bereits vollständig klassifiziert sind

b) Vektoren: Größen (Geschw. u. Kraft), die durch Stärke & Richtung charakt.
→ neben phys. Einheit drei reelle Zahlen (3 Tupel)

geometrisch → Vektoren $\vec{a}$ im $\mathbb{R}^3$ als gerichtete Strecken $\vec{a}$ ↗, Länge des Pfeils → $|\vec{a}|$ Betrag ≙ Maß für Stärke
↓
positive Zahl

Freier Vektor: parallel verschiebbar, Gebundener Vektor: hat Anfangspunkt
linienflüchtiger Vektor: entlang der Richtung verschiebbar.

Rechenregeln: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ Aneinandersetzen der Pfeile (Parallelogramm)



⇒ sofort kommutativ $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

und assoziativ $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

Subtraktion: $\vec{a} = \vec{a} \Rightarrow \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

$-\vec{a}$ hat gleiche Länge, aber umgekehrte Richtung

speziell Nullvektor $\vec{0}$ (Länge 0) wodurch Richtung undef.
irrelevant

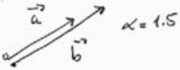
Einheitsvektor: $\vec{e}$ mit $|\vec{e}| = 1$

5.2 Skalar- und Vektorprodukt

Multiplikation mit Skalar (reelle Zahl):

verlängern / verkürzen den Vektor, Richtung bleibt

$$\alpha \cdot \vec{a} = \vec{b}$$



$\alpha < 0$: Richtungsumkehr

$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$; $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
distributiv

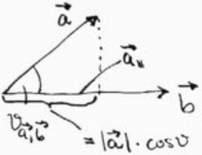
Multiplikation Vektor mit Vektor (inneres Produkt)
(Skalarprodukt)

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \vartheta_{\vec{a},\vec{b}}}$$ (Vektor · Vektor = Skalar)

$\vartheta_{\vec{a},\vec{b}} = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

Produkt der Beträge mal Kosinus des eingeschlossenen Winkels

Wird gebraucht für Projektion



Nur der Anteil von $\vec{a}$, der parallel zu $\vec{b}$ liegt, wirkt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}_\parallel| \cdot |\vec{b}| \cdot \text{sign}$$

Vorzeichen richtet sich nach $\vec{a}_\parallel$-Richtung und $\vec{b}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a}$ steht senkrecht auf $\vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{b}$

Eigenschaften:

i) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ Symmetrie

ii) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ Distributivität

iii) $(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha (\vec{a} \cdot \vec{b})$ Faktor

iv) $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$; $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

$$= |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \underset{0}{\cos\vartheta} = |\vec{a}|^2 \quad \text{Betragsquadrat}$$

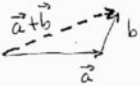
Einheitsvektor $\vec{e} \cdot \vec{e} = 1$

Schwarzsche Ungleichung: $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

Gleichheitszeichen für $\vartheta = 0$, also $\vec{a} \parallel \vec{b}$

Dreiecks-Ungleichung

$$|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}|+|\vec{b}|$$



Im Dreieck ist die Länge der Summe zweier Seiten stets größer (gleich) als die Länge der dritten Seite

Kosinussatz:

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+2(\vec{a}\cdot\vec{b}) =$$
$$= |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\vartheta_{\vec{a},\vec{b}}$$

Vektoren spannen Vektorräume auf

direkte Anschauung: 3-dim. Ortsraum (Höhe, Breite, Tiefe)

$D=3$

Fläche $D=2$ $\quad y \uparrow \rightarrow x$ $\quad$ komplexe Zahlen (Real- u. Imaginärteil)

Gerade $D=1$ Vektorbegriff fällt mit reellen Zahlen zusammen

aber auch $D=4$ Relativitätstheorie

$D=\infty$ Vektorraum der Zustände in QM

Das Vektorprodukt

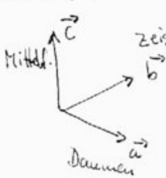
(äußeres Produkt, Kreuzprodukt)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \qquad (\text{Vektor} \times \text{Vektor} = \text{Vektor})$$

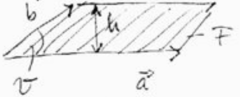
<u>Def.:</u> $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \vartheta_{\vec{a},\vec{b}}$ (Betrag)

$\vec{c}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (Richtung)

Durchlaufsinn nach rechte-Hand-Regel:



Betrag: Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms



$h = |\vec{b}| \cdot \sin\vartheta$

$F = h \cdot |\vec{a}|$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein <u>rechtshändiges System</u>

<u>Eigenschaften</u>

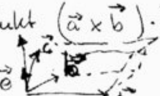
i) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ (antikommutativ) (rechte Hand!) antisymmetrisch

ii) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ wenn $\vec{a} \parallel \vec{b}$ (keine eingeschlossene Fläche)

iii) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ distributiv

Höhere Produkte - Spatprodukt

Spatprodukt $\underline{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}} = V$ - Volumen des Parallelepipedes (Spat)



Grundfläche $F = |(\vec{a} \times \vec{b})|$

Höhe: Proj. von $\vec{c}$ auf senkrechte Richtung

$\vec{e} \cdot \vec{c} = h$

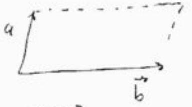
$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ ist Einheitvektor $\parallel$ zu $\vec{a}$

- entwickeln jetzt Begriff, der in der linearen Algebra eine zentrale Rolle spielt: <u>lineare Abhängigkeit bzw. Unabh.</u>

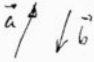
<u>linear abhängige Vektoren:</u>

zwei Vektoren → lin. unabhängig, wenn sie ein
$\vec{a}, \vec{b}$ im $\mathbb{R}^2$ nichtverschwindendes Parallelogramm aufspannen

"haben echt verschiedene Richtung"



$\vec{a} \times \vec{b} \neq 0$
$\vec{a} \nparallel \vec{b}$



$\vec{a} \times \vec{b} = 0$
$\vec{a} \parallel \vec{b}$

- um Begriff d. lin. Unabh. auf abstrakte Vektorräume übertragen zu können → geomet. Aussage in eine algebraische umformen.

- lin. abh. Vektoren lassen sich durch geeignete Multipl. mit Skalaren α und β gleich machen

$$\underbrace{\alpha \vec{a}}_{\text{gilt selbstverständlich auch für } \alpha=\beta=0} = \beta \vec{b} \quad ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

-

für lin. unabh. Vektoren $\vec{a}$ u. $\vec{b}$ ist eine solche Gleichheit nur als Nullvektor mgl.

aus $\alpha\vec{a} = \beta\vec{b}$ folgt eindeutig $\alpha = \beta = 0$

fordern wir also $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0$, so folgt für lin. unabh. Vektoren nur $\alpha = \beta = 0$, während für lin. abh. Vektoren weitere Lösungen ex.

- analog für allg. Dimension D

$$\sum_{j=1}^{D} \alpha_j \vec{b}_j = 0 \quad \text{nur für } \alpha_j \equiv 0$$

Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_D$ spannen D-dim. Vektorraum auf

- ab jetzt immer $D=3$

3 lin. unabh. Vektoren bilden eine Basis im 3D Vektorraum

jeder Vektor kann dargestellt werden durch:

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{b} + \alpha_2 \vec{b}_2 + \alpha_3 \vec{b}_3 \quad \text{(eindeutig)}$$

besonders bequeme Basis: paarweise orthogonale Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \qquad \text{mit } \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 : j = k \\ 0 : j \neq k \end{cases}$$

$\downarrow$

VektorKomp. auf Basis

auch dargestellt als

$$\vec a = \sum_{j=1}^{3} a_j \vec e_j \quad ; \quad \vec a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$ begl. der Basis $\{\vec e_j\}$ Basis-abh.!

→ Addition: $\vec a_1 + \vec a_2 = \sum_{j=1}^{3} (a_j^{(1)} + a_j^{(2)}) \vec e_j$

Skalarprodukt

$$\vec a \cdot \vec e_j = \sum_{k=1}^{3} a_k \underbrace{(\vec e_k \cdot \vec e_j)}_{\delta_{kj}} = a_j$$ Projektion auf $\vec e_j$ gibt Komponente a_j

$$\vec a \cdot \vec b = \left(\sum_{k=1}^{3} a_k \vec e_k\right)\left(\sum_{j=1}^{3} b_j \vec e_j\right) = \sum_{k,j=1}^{3} a_k b_j \underbrace{\vec e_k \vec e_j}_{=\delta_{kj}} = \sum_{k=1}^{3} a_k b_k$$

speziell Betrag: $|\vec a|^2 = \sum_{j=1}^{3} a_j^2$

additiv: $\vec a + \vec b = \vec c \rightarrow c_j = a_j + b_j$

Mult. mit Zahl $\alpha \vec a = \vec p \rightarrow p_j = \alpha_j \cdot a_j$

} in Komponenten ausgedrückt

Vektorprodukt

$$\vec a \times \vec b = \vec c = \left(\sum_{i=1}^{3} a_i \vec e_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{3} b_j \vec e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \vec e_i \times \vec e_j$$

$$= \sum_{\ell=1}^{3} c_\ell \vec e_\ell$$ allgemein

$\vec e_1 \times \vec e_2 = \vec e_3$

RHS $(\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3)$

für 3D noch einfach (nach rechte-Hand-Regel)

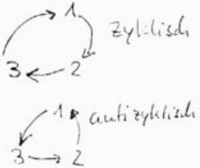
$$\vec e_i \times \vec e_j = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \vec e_k$$

mit <u>Epsilontensor</u>

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{falls } (i,j,k) \text{ zyklisch } (=(1,2,3) \text{ und zyklisch}) \text{ (Rechte-Hand-Regel)} \\ -1, & \text{falls } (i,j,k) \text{ antizyklisch aus } (1,2,3) \text{ oder } (2,1,3) \text{ und zyklisch} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \vec{e}_i \left(\vec{e}_j \times \vec{e}_k \right)$$

$\Rightarrow 3^3 = 27$ Elemente



damit

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{k=1}^{3} \left\{ \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, a_i b_j \right\} \vec{e}_k =$$

$\varepsilon_{231} = 1 \quad \varepsilon_{321} = -1$

$$= \left(a_2 b_3 - a_3 b_2\right) \cdot \vec{e}_1 - \left(a_1 b_3 - a_3 b_1\right) \vec{e}_2 + \left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right) \cdot \vec{e}_3$$

$$=: \begin{vmatrix} \overset{+}{\vec{e}_1} & \overset{-}{\vec{e}_2} & \overset{+}{\vec{e}_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{vmatrix}$$

Determinantensymbol s. später

Speziell mit $\vec{b} \Rightarrow$ Einheitsvektor:

z.B. $\vec{b} = \vec{e}_1 \; : \; b_1 = 1 \; ; \; b_2 = b_3 = 0$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{e}_1 = \vec{e}_1 (0 - 0) - \vec{e}_2 (0 - a_3) + \vec{e}_3 (0 - a_2)$$

$$\vec{a} \times \vec{e}_1 = a_3 \vec{e}_2 - a_2 \vec{e}_3$$

analog

$$\vec{a} \times \vec{e}_2 = a_1 \vec{e}_3 - a_3 \vec{e}_1$$

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{e}_3 = a_2 \vec{e}_1 - a_1 \vec{e}_2 \qquad (*)}$$

Verwenden zum Beweis des <u>Entwicklungssatzes</u>

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

l.S. r.S.

Homogen in Längen $\Rightarrow$ Beweis f. Einheitsvektoren

o.B.d.A. $\vec{c} = \vec{e}_1$; $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2$

linear in $\vec{b}$: $\rightarrow$ Komponentenweise zu behandeln

1) $\vec{b} = \vec{e}_1$: l.S. $= \vec{a} \times (\vec{e}_1 \times \vec{e}_1) = 0$; r.S. $= 0$ da $\vec{b} = \vec{c}$

2) $\vec{b} = \vec{e}_2$: l.S. $= \vec{a} \times (\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) = -\vec{a} \times \vec{e}_3 = -(a_2\vec{e}_1 - a_1\vec{e}_2)$ (s. (*))

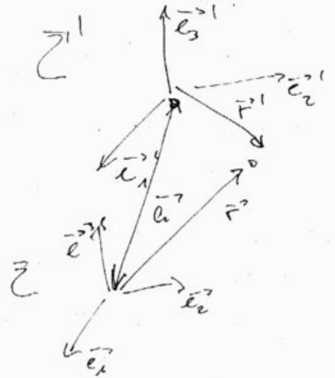
r.S. $= \vec{e}_2\,(\vec{a}\cdot\vec{e}_1) - \vec{e}_1\,(\vec{a}\cdot\vec{e}_2) = a_1\vec{e}_2 - a_2\vec{e}_1$

$\square$

1.4 Koordinatentransformationen

1.4.1 Translation

Transformation zwischen zwei Koordinatensystemen mit parallelen Achsen



$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ in Σ

$\vec{r}' = (x_1', x_2', x_3')$ in Σ'

$x_1' = x_1 + a_1$

$x_2' = x_2 + a_2$

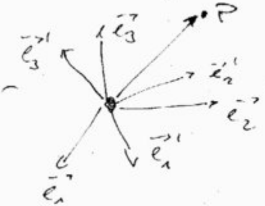
$x_3' = x_3 + a_3$

$\vec{r}' = \vec{r} + a$

1.4 Koordinatentransformationen

1.4.2 Drehung

Betrachte zwei Koordinatensysteme mit gemeinsamem Ursprung



Keine Translation ⟶ Drehung

Ortsvektor von P : $\vec r = \vec r\,'$

aber zwei Darstellungen:

$\vec r = (x_1, x_2, x_3)^T \quad \vec r\,' = (x_1', x_2', x_3')^T$

i) Transformation der Basisvektoren

$\vec e_j\,' = \sum_k d_{jk} \vec e_k$ Linearkombination der alten Einheitsvektoren

$\vec e\,' = D \cdot \vec e$

$$\vec{e}_j^{\,\prime} \cdot \vec{e}_m = \sum_k d_{jk} \underbrace{\vec{e}_k \cdot \vec{e}_m}_{\delta_{km}}$$

$$= \sum_k d_{jk} \delta_{k,m} = d_{jm}$$

$$\Rightarrow d_{jm} = \vec{e}_j^{\,\prime} \cdot \vec{e}_m = \cos \varphi_{jm}$$

$$\sphericalangle(\vec{e}_j^{\,\prime}, \vec{e}_m)$$

$\Rightarrow$ Drehmatrix

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & \cdots & \cdots \\ d_{31} & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

mit $d_{ij} = \cos \varphi_{ij}$

1049

IV C 23

ii) Transformation der Komponenten

aus $\vec{r}' = \vec{r} \Rightarrow$

$$\sum_j x_j' \vec{e}_j' = \sum_j x_j \vec{e}_j \quad \Big| \cdot \vec{e}_i'$$

$$\sum_j x_j' \underbrace{\vec{e}_j' \cdot \vec{e}_i'}_{\delta_{ji}} = \sum_j x_j \vec{e}_j \vec{e}_i'$$

$$= \sum_j x_j \underbrace{\vec{e}_i' \vec{e}_j}_{\alpha_{ij}} \qquad \sphericalangle\, \vec{e}_i', \vec{e}_j$$

$$\Rightarrow x_i' = \sum_j \alpha_{ij} x_j$$

Kompakte Schreibweise

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \cdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

oder:

$$\vec{r}\,' = \hat{D}\,\vec{r}$$

iii) Umkehrtransformation

bilde inverse Matrix D^{-1}

$$\vec{r} = D^{-1}\,\vec{r}\,'$$

$$D^{-1}\cdot D = D\,D^{-1} = E \quad \text{- Einheitsmatrix}$$

Behauptung $D^{-1} = D^{T} \Rightarrow (d^{-1})_{ij} = d_{ji}$

Beweis:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} \Rightarrow \sum x_j'\,\vec{e}_j\,' = \sum x_j\,\vec{e}_j \quad \Big|\cdot \vec{e}_i$$

$$\sum x_j'\,\underbrace{\vec{e}_j\,'\cdot\vec{e}_i}_{d_{ji}} = \sum_j x_j\,\underbrace{\vec{e}_j\cdot\vec{e}_i}_{\delta_{ji}} = x_i$$

$\sphericalangle\, \vec{e}_j\,', \vec{e}_i$

$$\Rightarrow x_i = \sum_j d_{ji}\,x_j'$$

$$\cancel{x_i = \sum_j d_{ij} x'_j = \sum_{jk} d_{ji} d_{jk} x_k = x_i \sum_j d_{ji} d_{jk} = \delta_{ik}}$$

iv) Eigenschaften der Drehmatrix

$$E = D^{-1} D = D D^{-1} \qquad D^{-1} = D^T$$

$$c_{ij} = \sum a_{im} b_{mj} =$$

$$= \sum (d^{-1})_{im} d_{mj} =$$

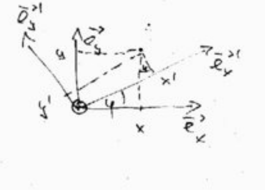
$$\underline{\underline{\delta_{ij} = \sum_m d_{mi} d_{mj} = d_{1i} d_{1j} + d_{2i} d_{2j} + d_{3i} d_{3j}}}$$

oder

$$\delta_{ij} = \sum_m d_{im} d_{jm} \qquad \text{weil } \underline{\underline{\det D = \det D^T}}$$

$$\det(D) = 1$$

v) Drehung in x,y Ebene um z-Achse.



$$\sphericalangle\, e_x' \vec{e}_x = \varphi$$

$$\sphericalangle\, \vec{e}_y^{\,\prime}, \vec{e}_y = \varphi$$

$$\sphericalangle\, \vec{e}_x^{\,\prime}, \vec{e}_y = \frac{\pi}{4} - \varphi$$

$$\sphericalangle\, \vec{e}_y^{\,\prime}, e_x = \frac{\pi}{4} + \varphi$$

$$d_{11} = \cos\varphi \qquad d_{22} = \cos\varphi$$

$$d_{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi \qquad d_{21} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin\varphi$$

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = z \end{cases}$$

und umgekehrt:

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \\ z = z' \end{cases}$$

$$D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_i = \sum_j d_{ji} x'_j = \underbrace{\sum_{jk} d_{ji} d_{jk}}\, x_k = \sum_k \delta_{ik} x_k = x_i$$

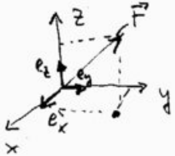
$$x'_j = \sum_k d_{jk} x_k \qquad \underline{\underline{\sum_j d_{ji} d_{jk} = \delta_{ik}}} \;!$$

$d_{11} = \cos\varphi \quad d_{21} = -\sin\varphi \quad d_{31} = 0$

Wichtige Einheitsvektor-Wahlen

1) kartesisches System:

$\vec{e}_1 = \vec{e}_x \; ; \; \vec{e}_2 = \vec{e}_y \; ; \; \vec{e}_3 = \vec{e}_z \qquad$ (RHS)



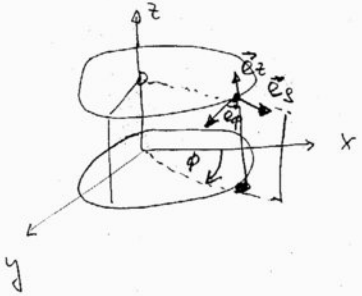
Koordinaten x, y, z

$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

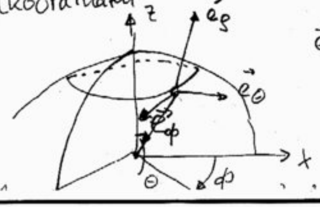
2) Zylinderkoordinaten $\quad \varrho, \phi, z, \; \vec{e}_\varrho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$

Jetzt richtungsabhängig

$x = \varrho \cos\phi$
$y = \varrho \sin\phi$
z bleibt



3) Kugelkoordinaten



$x^2+y^2+z^2=r^2$;

$\vec{e}_\varrho, \vec{e}_\Theta, \vec{e}_\phi, \; r, \Theta, \phi$

$x = r \sin\Theta \cos\phi$
$y = r \sin\Theta \sin\phi$
$z = r \cos\Theta$