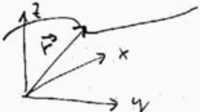
6. Vektoranalysis

Raumkurven

- Bahn eines Teilchens wird durch vektorwertige Fkt. der Zeit beschrieben

$$t \to \vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$
$$t \in \mathbb{R};\ \vec{r} \in \mathbb{R}^3$$



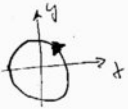
Kurve stetig: $|\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)| < \varepsilon$ sofern $|t - t_0| < \delta = \delta(\varepsilon)$

Bsp.: 1) geradliniege Bew. mit konst. Geschw.

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}(t - t_0)$$
$$\vec{v} = \text{const};\ \vec{r}_0 = \text{const.}$$

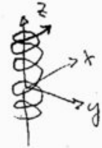
2) Kreisbahn in x-y-Ebene

$$\vec{r}(t) = R\big(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0\big)$$



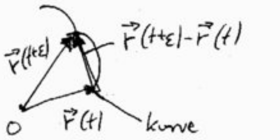
3) Schraubenlinie

$$\vec{r}(t) = \big(R\cos(\omega t), R\sin(\omega t), t \cdot v_z\big)$$



Ableitungen vektorwertiger Funktionen

$$\frac{d}{dt}\vec r(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\vec r(t+\varepsilon) - \vec r(t)}{\varepsilon}$$



komponentendarst.

$$\dot{\vec r}(t) = (\dot x(t), \dot y(t), \dot z(t))$$

$\vec r(t+\varepsilon) = \vec r(t) + \Delta\vec r$

mehrfache Ableitungen sind rekursiv def.

$$\frac{d^n}{dt^n}\vec r(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\vec r(t)\right)$$

Ableitungsregeln für vektorwertige Funktionen

$$\frac{d}{dx}\left(\vec a(x) + \vec b(x)\right) = \frac{d\vec a}{dx} + \frac{d\vec b}{dx}$$

Produktregeln:

1) $\frac{d}{dx}(\vec a \cdot \vec b) = \frac{d\vec a}{dx}\cdot \vec b + \vec a\, \frac{d\vec b}{dx}$

2) $\frac{d}{dx}(\vec a \times \vec b) = \frac{d\vec a}{dx} \times \vec b + \vec a \times \frac{d\vec b}{dx}$

3) $\frac{d}{dx}\left(f(x)\vec a(x)\right) = \frac{df}{dx}\vec a(x) + f(x)\frac{d\vec a}{dx}$

- Ableitung eines zeitabhängigen Einheitsvektors $\vec e(t)$ steht senkrecht auf diesem

$\vec e(t)$ mit $\vec e \cdot \vec e = 1$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec e \cdot \vec e) = 0 \rightarrow 2\frac{d\vec e}{dt}\cdot \vec e = 0 \Rightarrow \dot{\vec e}\cdot \vec e = 0$$

Felder

- bisher → individuelle Objekte (Skalare, Vektoren) betrachtet oder einparametrige Scharen (Raumkurven oder vektorwertige Funktionen) betrachtet

Nun: Begriff des phys. Feldes

Motivation: 1) Rakete im Flug $\vec{r}(t)$ mit folgenden Größen:

- Temp. am Ort $\vec{r}$: $T(\vec{r}) = T(x,y,z)$
- Gravitationskraft am Ort $\vec{r}$: $\vec{K}(\vec{r}) = \vec{K}(x,y,z)$
- Elektr. Feldstärke am Ort $\vec{r}$: $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(x,y,z,t)$
- Magn. —"— —"— : $\vec{B}(\vec{r},t)$

2) Strömungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit $\vec{v}(\vec{r},t)$

Def.: Ein Feld ist eine skalare oder vektorielle Größe A, der an jedem Punkt $\vec{r} = (x,y,z)_K$ des Raumes ein Wert $A(x,y,z)$ zugeordnet wird.
Allgemeiner kann A auch noch von der Zeit t abhängen.

Ist $A(\vec{r})$ zeitunabh. ⇒ Feld heisst statisch

Skalare Felder

<u>skalares Feld</u> $\phi = \phi(\vec{r})$ mit $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ oder $\Omega \in \mathbb{R}^3$

Ω - Def. bereich

Unter Koordinatentransformationen (Achsen) $K \to K'$ $\left(\text{mit } x_i' = D_{ij} x^j \right)$

verändert sich der Wert der Fkt. ϕ nicht!

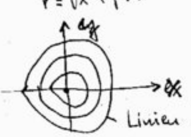
$$\phi(x_i) = \phi'(x_i)$$

Ein skalares Feld heisst invariant unter Koord. transf.

phys. Bsp.: Temperaturfeld, Ladungsdichte

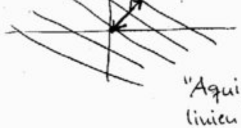
Bsp.: a) $\phi(\vec{r}) = \beta r$ $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

<u>grafische Darst.</u> $\to$ zwei-dim. Schnitte



Linien mit $\phi(\vec{r})$=const
Höhenlinien

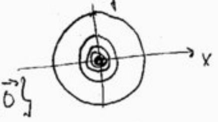
b) $\phi(\vec{r}) = \vec{a} \cdot \vec{r}$ $\vec{a} = \text{const.}, \vec{r} \in \mathbb{R}^3$

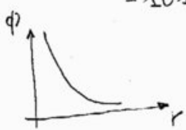


"Äquipotential-linien oder Höhenlinien"
$\Leftrightarrow$ Höhenprofil wie auf Landkarte

:) $\phi(\vec{r}) = + \frac{1}{|\vec{r}|}$

Def. bereich $\vec{r} \in \mathbb{R}^3 / \{\vec{0}\}$





Vektorfelder

Vektorfeld $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$ mit $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ oder $\Omega \in \mathbb{R}^3$
vektorwertige Funktion dreier unabh. Variablen

Die Komponenten von $\vec{A}$ transformieren unter Koordinatendrehung $K \to K'$; $x_i' = D_{ij} x_j$ wie Vektoren

$$A_i'(x_l') = D_{ij} A_j(x_l)$$

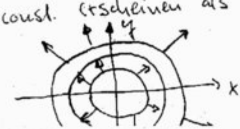
phys. Bsp.: Gravitationsfeld $\vec{K}(\vec{r})$, el. u. magn. Felder $\vec{E}(\vec{r})$ u. $\vec{B}(\vec{r})$

Geschwindigkeit einer Flüssigkeit $\vec{v}(\vec{r})$

Bsp.: 1) $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{r}\alpha$

2) $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$ (elektr. Feld einer Punktladung q)

grafische Darstellung: zweidim. Schnitte → Flächen konstanter Feldstärke $|\vec{A}(\vec{r})| = \text{const.}$ erscheinen als Höhenlinien

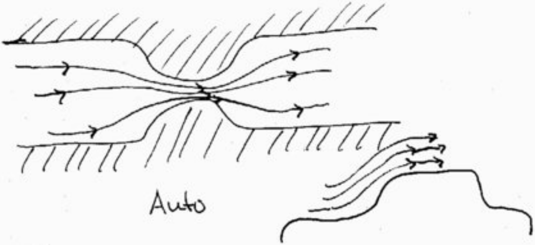


$\vec{A}(\vec{r}) = \alpha\vec{r}$ $(\alpha > 0)$

Pfeillänge $\alpha \cdot r \hat{=}$ Stärke

Richtung: radial, senkrecht

zweite Darstellung: Feldlinien → deren lokale Richtung gibt Feldrichtung an, deren Dichte ~ zur Feldstärke



P-tielle Ableitungen

- von Interesse: wie Feld von Raumpunkt zu Raumpunkt sich ändert
  → Auskunft durch Ableitung des Feldes nach dem Ort
- zunächst f. Skalares Feld (später bei Vektorfeldern → kriterien für jede Komponente)
- Änderung des Feldes längs eines Weges parallel zu einer Koordinatenachse → Feld effektiv nur von einer Variablen abhängig ⇒ wie gewohnt differenzieren

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\phi(x+\Delta x, y, z) - \phi(x, y, z)}{\Delta x} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{y,z}$$

- während Diff.prozess → andere Variablen strikt konstant zu halten
  ⇒ Resultat wieder skalares Feld, abh. von x, y, z
- analog partielle Ableitungen nach den anderen Variablen

<u>Bsp.:</u> $\phi = xy^5 + z \Rightarrow \partial_x \phi = y^5,\ \partial_y \phi = 5xy^4,\ \partial_z \phi = 1$

$$\phi = r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow \partial_x \phi = \frac{x}{r}\ ;\ \partial_y \phi = \frac{y}{r}\ ;\ \partial_z \phi = \frac{z}{r}$$

Vektorfelder → partiell ableiten → jede Komponentenfkt. partiell ableiten

<u>Bsp.:</u> $\vec{A}(\vec{r}) = \alpha \frac{\vec{r}}{r^3}$ (z.B. elektr. Feld)

$$\Rightarrow \partial_x A_x(\vec{r}) = \partial_x \left(\alpha \frac{x}{r^3}\right) = \alpha \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x}{r^4} \cdot \frac{x}{r}\right) = \frac{\alpha}{r^5}\left(r^2 - 3x^2\right)$$

$$\partial_x A_y(\vec{r}) = \partial_x \left(\alpha \frac{y}{r^3}\right) = -3\alpha \frac{yx}{r^5}\ ;\ \partial_x A_z(\vec{r}) = \partial_x \left(\alpha \frac{z}{r^3}\right) = -3\alpha \frac{zx}{r^5}$$

damit insgesamt: $\partial_x \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\alpha}{r^5}\left(r^2 - 3x^2, -3xy, -3xz\right)$

- gemäß Def. part. Ableitungen → Diff.regeln

$$\partial_x (\phi_1 + \phi_2) = \partial_x \phi_1 + \partial_x \phi_2$$
$$\partial_x (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\partial_x \vec{a}) \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot (\partial_x \vec{b})$$
$$\partial_x (\vec{a} \times \vec{b}) = (\partial_x \vec{a}) \times \vec{b} + \vec{a} \times (\partial_x \vec{b})$$

- da partielle Ableitung eines Feldes wieder ein Feld ⇒ mehrfache Ableitungen rekursiv definieren:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\ ;\ \frac{\partial^n \phi}{\partial x^n} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-1}\phi}{\partial x^{n-1}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-2}\phi}{\partial x^{n-2}}\right)\right]$$

- auch gemischte Ableitungen machen Sinn

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)$$ Reihenfolge! von links nach rechts

- bei stet. partiellen Ableitungen mindesten 2. Ordnung
  $\Rightarrow$ <u>Vertauschbarkeit</u> $\boxed{\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}}$

<u>Bsp.</u>: $\phi = x^5 + y^3\cdot z \Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial x} = 5x^4;\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 20x^3 \ldots$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 3y^2\cdot z;\ \frac{\partial\phi}{\partial z} = y^3$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = 0 = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} = 3y^2 = \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y} \quad \text{usw.}$$

- <u>Achtung Kettenregel</u>: bei skalaren Fktn. <u>einer</u> Variablen

gilt $\frac{d f[x(t)]}{dt} = \frac{df}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$

- bei mehreren Variablen ändert sich nichts, wenn diese von <u>verschiedenen</u> Parametern abhängen

$$\phi[x(t_x), y(t_y), z(t_z)] \Rightarrow \frac{d\phi}{dt_x} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt_x}$$

interessant nun, wenn Komponenten alle von <u>demselben</u> Parameter abhängen
in Abh. von t ändern sich dann nämlich alle Variablen gleichzeitig

$$\underline{\phi[\vec{r}(t)] = \phi(x(t), y(t), z(t))}$$

setzen

$$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t); \quad \Delta y = y(t+\Delta t) - y(t)$$
$$\Delta z = z(t+\Delta t) - z(t)$$

allg. $x_1 = x$; $x_2 = y$, $x_3 = z$ von jetzt an

$$\Delta x_i = x_i(t+\Delta t) - x_i(t)$$

→ berechnen folgenden Differenzenquotienten $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D} = \frac{\phi[x_1(t+\Delta t), x_2(t+\Delta t), x_3(t+\Delta t)] - \phi[x_1(t), x_2(t), x_3(t)]}{\Delta t}$$

(später Grenzwert $\Delta t \to 0$ als Ableitung von ϕ nach t interpretieren)

- formen $\mathcal{D}$ dazu um:

$$\mathcal{D} = \frac{1}{\Delta t}\Big[\phi(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3) - \phi(x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3)$$
$$+ \phi(x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3) - \phi(x_1, x_2, x_3+\Delta x_3) +$$
$$+ \phi(x_1, x_2, x_3+\Delta x_3) - \phi(x_1, x_2, x_3)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\Delta x_1}\Big[\phi(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3) -$$
$$- \phi(x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3)\Big]\frac{\Delta x_1}{\Delta t} +$$
$$+ \frac{1}{}\Big[\phi(x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3) - \phi(x_1, x_2, x_3+\Delta x_3)\Big]\frac{\Delta x_2}{\Delta t} +$$

$$+ \frac{1}{\Delta x_3}\left[\varphi(x_1, x_2, x_3+\Delta x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3)\right]\frac{\Delta x_3}{\Delta t}$$

- lassen nun $\Delta t \to 0$ streben
- können aus Stetigkeit der Fktn. $x_i(t)$ $\Delta x_i \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0$ folgern
- setzen dann noch Stetigkeit für die ersten partiellen Abl. voraus $\rightarrow$

$$\lim_{\Delta t \to 0} D = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt}$$

bezeichnet Limes als <u>totale Ableitung von φ nach t:</u>

$$\boxed{\frac{d\varphi}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}}$$

$\Rightarrow$ totale Differenzial $\quad d\varphi = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i$

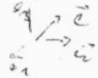
(sieht aus wie Skalar-produkt!!)

<u>Gradient</u>

- <u>partielle Abl.</u> $\Rightarrow$ Änderung eines Feldes beim Fortschreiten längs einer Koordinatenachse

- <u>nun Änderung eines skalaren Feldes längs einer beliebigen Richtung $\vec{e}$ im Raum</u>

$$L\vec{e}$$



Vektoranalysis

skalare Felder $\phi(\vec{r})$

Vektorfelder $\vec{a}(\vec{r})$

<u>Nabla-Operator:</u> $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) =$

$$= \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

spalten

<u>Anwendungen:</u>

- <u>Gradientenfeld:</u> Zuordnung <u>skalares</u> Feld $\phi(\vec{r})$
  $\rightarrow$ <u>vektorielles</u> Feld (Gradientenfeld)

$$\text{grad}\,\phi = \vec{\nabla}\phi$$

Betrag $|\text{grad}\,\phi| \rightarrow$ Maß für Stärke der ϕ-Änderung, wenn man $\perp$ zu den Flächen $\phi = \text{const.}$ (Äquipotentiallinien) fortschreitet

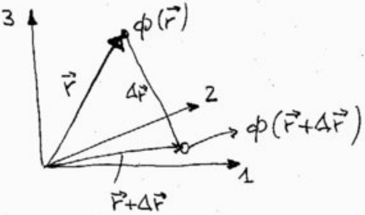
- ∇ auch auf Vektoren anwenden

1) Divergenz: (Quellenfeld) $\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} = \text{div}\,\vec{a}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{a}(\vec{r})$

Divergenz des Vektorflusses durch ein Volumen

Quellenergiebigkeit; Nettofluss

d.h. uns interessiert die Größe



$$\Delta\phi = \phi(\vec{r}+\Delta\vec{r}) - \phi(\vec{r})$$
$$\Delta\vec{r} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3) \uparrow\uparrow \vec{e}$$

läge $\Delta\vec{r}$ z.B. parallel zur 1-Achse, so würde bei hinreichend kleinen Änderungen $\Delta\vec{r} = \Delta x_1 \vec{e}_1$ gelten

$$\Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\Delta x_1 \qquad [\phi(\vec{r}+\Delta\vec{r}) = \phi(x_1+\Delta x_1, x_2, x_3)]$$

- diese Vorraussetzung ist zwar nicht erfüllt
- allerdings mgl. durch Drehung des Achsenkreuzes
  phys. Feld ändert sich dabei nicht
- führen Drehung so durch, dass neue 1-Achse mit $\vec{e}$ zusammenfällt

$$\Rightarrow \quad \Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}_1}\Delta\bar{x}_1$$

- können nun $\Delta\vec{r}$ wie folgt in neuen u. alten Koord.system darstellen

$$\Delta\vec{r} = \Delta\bar{x}_1\vec{\bar{e}}_1 = \Delta x_1\vec{e}_1 + \Delta x_2\vec{e}_2 + \Delta x_3\vec{e}_3$$

- daraus folgt durch skalare Mult. mit $\vec{e}_i$:

$$\Delta x_i = \Delta\bar{x}_i(\vec{\bar{e}}_1\cdot\vec{e}_i) \qquad (*)$$

⇒ für hinreichend kleine Verschiebungen längs der $\bar{x}_1$-Achse ⇒

$$\frac{dx_i}{d\bar{x}_1} = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_i$$

→ zusammen mit (*) und Kettenregel

$\phi = \phi(x_1(\bar{x}_1), x_2(\bar{x}_1), x_3(\bar{x}_1))$

$$\Delta\phi = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{dx_j}{d\bar{x}_1}\Delta\bar{x}_1 = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\underbrace{(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_j)\,\Delta\bar{x}_1}_{\Delta x_j}$$

$= \frac{d\phi}{d\bar{x}_1}\Delta\bar{x}_1 =$ $\qquad \frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}_1} = \sum \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{dx_j}{d\bar{x}_1}$

Feldänderung in einer bel. Raumrichtung setzt sich additiv aus den entsprechenden Änderungen in den drei Koordinatenrichtungen zusammen:

$\Delta\vec{r} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)$

$$\Delta\phi = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\Delta x_j$$

- hat Gestalt eines Skalarproduktes zw. Vektoren

$$(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3) \text{ und } \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right)$$

⇒ <u>Def.</u> <u>Gradientenfeld:</u> Einem stetig. diff.baren <u>skalaren</u> Feld $\phi(\vec{r})$ wird ein <u>vektorielles</u> Feld, Gradientenfeld, zugeordnet:

$$\text{grad}\,\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right)$$

<u>Def. Nabla-Operator:</u> $\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) = \vec{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3\frac{\partial}{\partial x_3}$

- wirkt auf alle Fktn., die rechts von ihm stehen

$$\operatorname{grad}\phi = \vec{\nabla}\phi \qquad = \frac{\partial\phi}{\partial\vec{r}}$$

- für Feldänderung $\Delta\phi \Rightarrow$

$$\Delta\phi = \operatorname{grad}\phi \cdot \Delta\vec{r} = \vec{\nabla}\phi \cdot \Delta\vec{r}$$

- Interpretation des Gradientenvektors:

betrachten speziell eine Richtung, in der ϕ sich nicht ändert:

$$\underbrace{\Delta\phi = 0 = \operatorname{grad}\phi \cdot \Delta\vec{r}}_{\text{Skalarprodukt}} \Leftrightarrow \operatorname{grad}\phi \perp \Delta\vec{r}$$

→ nur Null, wenn Kosinus d. Zwischenwinkels N

$\Rightarrow$ Gradientenvektor $\operatorname{grad}\phi = \vec{\nabla}\phi$ steht $\perp$ auf Flächen $\phi = \text{const.}$
Äquipotentialflächen

Betrag $|\operatorname{grad}\phi| \Rightarrow$ Maß für Stärke der ϕ-Änderung wenn man $\perp$ zu den Flächen $\phi = \text{const.}$ fortschreitet
Rückseite

z.B. ϕ s. unten

- Rechenregeln:

$$\operatorname{grad}(\phi_1 + \phi_2) = \operatorname{grad}\phi_1 + \operatorname{grad}\phi_2$$

$$\operatorname{grad}(\phi_1\phi_2) = \phi_2 \operatorname{grad}\phi_1 + \phi_1 \operatorname{grad}\phi_2$$

Bsp.: 1) $\operatorname{grad}(\vec{a}\cdot\vec{r}) =$ ($\vec{a}$: konst. Vektor)

$$\vec{a}\cdot\vec{r} = \sum_{j=1}^{3} a_j x_j \Rightarrow \frac{\partial(\vec{a}\cdot\vec{r})}{\partial x_i} = a_i \Rightarrow \operatorname{grad}(\vec{a}\cdot\vec{r}) = \vec{a}$$

2) $\operatorname{grad} r =$ $\left(r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)$

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \Rightarrow \operatorname{grad} r = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_r$$

3) $\operatorname{grad} \frac{1}{r^2} = ?$; $\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r^2} = \left(\frac{d}{dr} \frac{1}{r^2}\right) \frac{\partial r}{\partial x_i} = -\frac{2}{r^3} \frac{x_i}{r}$

$\Rightarrow \operatorname{grad} \frac{1}{r^2} = -\frac{2}{r^3} \vec{e}_r$

4) $\operatorname{grad} f(r) = ?$; $\frac{\partial}{\partial x_i} f(r) = \left(\frac{df}{dr}\right) \frac{\partial r}{\partial x_i} = f'(r) \frac{x_i}{r} \Rightarrow \operatorname{grad} f(\vec{r}) = f'(\vec{r}) \vec{e}_r$

(Radial)

5) $\operatorname{grad}(m g z) = m g \vec{e}_z$

$\vec{F} = -\operatorname{grad} U(x, y, z)$

$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi(x, y, z)$

6.3 Divergenz und Rotation

- Gradient nur für skalare Felder def. $\Rightarrow$ $\operatorname{grad}\varphi$ - Vektor
- ∇ auch auf Vektoren anwenden (Vektorverknüpfung)

2 Mgl.heiten:

Def.: $\vec{A}(\vec{r}) = (A_1(\vec{r}), A_2(\vec{r}), A_3(\vec{r}))$ sei ein stet. diff.bares Vektorfeld.

Dann nennt man

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial A_j}{\partial x_j} = \operatorname{div} A(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \cdot A(\vec{r})$$

die Divergenz (das Quellenfeld) von $\vec{A}(\vec{r})$. $\Rightarrow$ Rückseite

Def.: Divergenz eines Gradientenfeldes

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j^2} \equiv \Delta \phi$$

$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$

wobei $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ d. Laplace-Operator ist.

110 *

$$\operatorname{div}(\vec{A}+\vec{B}) = \operatorname{div}\vec{A} + \operatorname{div}\vec{B}$$

$$\operatorname{div}(\alpha\vec{A}) = \alpha \operatorname{div}\vec{A} \qquad \alpha = \text{const}$$

$$\operatorname{div}(\varphi\vec{A}) = \varphi \operatorname{div}\vec{A} + \vec{A}\cdot\operatorname{grad}\varphi(r)$$

- $\operatorname{rot}(\vec{A}+\vec{B}) = \operatorname{rot}\vec{A} + \operatorname{rot}\vec{B}$
- $\operatorname{rot}(\alpha\vec{A}) = \alpha \operatorname{rot} A$
- $\operatorname{rot}(\varphi\vec{A}) = \varphi \operatorname{rot}\vec{A} + \operatorname{grad}\varphi \times \vec{A} \qquad \varphi(r)$

$$\operatorname{rot}_1(\varphi\vec{A}) = \partial_2(\varphi\vec{A})_3 - \partial_3(\varphi\vec{A})_2 =$$

$$= \varphi\,\partial_2\vec{A}_3 + A_3\,\partial_2\varphi - \varphi\,\partial_3 A_2 - A_2\,\partial_3\varphi$$

$$= \varphi(\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2) + (\partial_2\varphi)A_3 - (\partial_3\varphi)A_2$$

$$= \varphi \operatorname{rot}_1\vec{A} + (\operatorname{grad}\varphi \times \vec{A})_1$$

- $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = 0$ (Gradientenfelder sind wirbelfrei !!)

Test für Gradienten $\operatorname{rot}_1(\operatorname{grad}\varphi) = \partial_2(\operatorname{grad}\varphi)_3 - \partial_3(\operatorname{grad}\varphi)_2 = 0$

$$- \operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{A}) = 0$$

$$= \partial_1(\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2) + \partial_2(\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3)$$

$$+ \partial_3(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) = 0$$

Rotorfeld hat keine Senken oder Quellen

$$- \operatorname{rot}\vec{r} = 0$$

$$\partial_2 r_3 - \partial_3 r_2 = 0 \qquad \frac{\partial x_3}{\partial x_2} - \frac{\partial x_3}{\partial x_3} = 0 !$$

$$- \operatorname{rot}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0$$

$$-\frac{3}{r^4} x_2$$

$$\operatorname{rot}_1\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \partial_2 \frac{x_3}{r^3} - \partial_3 \frac{x_2}{r^3} = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{r^3} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r^3}$$

$$= 0$$

$$- \operatorname{rot}\left(\tfrac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}\right) = \vec{B}$$

$B = \text{const}$

$$a \times (b \times c) = b(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$$

$$= (\vec{\nabla} \cdot \vec{r})\tfrac{1}{2}\vec{B} - \tfrac{1}{2}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\, r$$

$$= \tfrac{3}{2}\vec{B} - \tfrac{1}{2}(\vec{B}\,\vec{\nabla})\,\vec{r} = B$$

$$\Rightarrow 1\,\vec{r}$$

$$= c_x \cdot \left[-\partial_z b_y + \partial_y b_z \right] + c_y \left[-\partial_x b_z + \partial_z b_x \right]$$

$$+ c_z \cdot \left[\partial_x b_y - \partial_y b_x \right] +$$

$$+ b_x \left[-\partial_y c_z + \partial_z c_y \right] + b_y \left[\partial_x c_z - \partial_z c_x \right] + b_z \left[-\partial_x c_y + \partial_y c_x \right]$$

$$= \vec{c} \cdot \left(\operatorname{rot} \vec{b} \right) - \vec{b} \cdot \left(\operatorname{rot} \vec{c} \right)$$

$$= \left[\partial_2 b_3 - \partial_3 b_2 \right] c_1 - \left[\partial_1 b_3 - \partial_3 b_1 \right] c_2 + \left[\partial_1 b_2 - \partial_2 b_1 \right] c_3$$

$$- \left\{ \left[\partial_2 c_3 - \partial_3 c_2 \right] b_1 - \left[\partial_1 c_3 - \partial_3 c_1 \right] b_2 + \left[\partial_1 c_2 - \partial_2 c_1 \right] b_3 \right\}$$

$$= \vec{c} \cdot \operatorname{rot} \vec{b} - \vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{c}$$

<u>Bsp.</u>: Rotation des Vektorfeldes

$$\vec{A} = 3x^2 y \, \vec{e}_x + y z^2 \, \vec{e}_y - x z \, \vec{e}_z$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial(-xz)}{\partial y} - \frac{\partial(yz^2)}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial(3x^2y)}{\partial z} - \frac{\partial(-xz)}{\partial x} \right)$$

$$+ \vec{e}_z \left(\frac{\partial(yz^2)}{\partial x} - \frac{\partial(3x^2y)}{\partial y} \right) = -2yz \, \vec{e}_x + z \, \vec{e}_y - 3x^2 \, \vec{e}_z$$

$\mathrm{rot}(\phi\vec{a}) = \ldots$

Ableitung für ~~x~~ 1-Komponente

$$\mathrm{rot}_1(\phi\vec{a}) = \partial_2 (\phi\vec{a})_3 - \partial_3 (\phi\vec{a})_2 =$$

$$= \phi\partial_2 a_3 + a_3 \partial_2 \phi - \phi \partial_3 a_2 - a_2 \partial_3 \phi$$

$$= \phi(\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2) + (\partial_2 \phi) a_3 - (\partial_3 \phi) a_2$$

$$= \phi \,\mathrm{rot}_1 \vec{a} + ((\mathrm{grad}\,\phi) \times \vec{a})_1$$

zyklisch fortsetzen

Integration von Vektorfunktionen

- Grundtyp des Integrals über reelle, stetige Fktn. einer Variablen
- im vielen phys. Anwendungen → "Vektorintegration"
$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$; $\vec{r}(t) = \int_0^t \vec{v}(\tau)d\tau$

Gewöhnliches Integral über Vektoren

Verallgemeinerung des Integralbegriffs → statt Fktn. (skalarwertig) → vektorwertige Fktn. <u>einer</u> Variablen z.B. $\vec{v}(t)$

<u>Def.</u> Geg. sei vektorwertige Fkt. $\vec{a}(t)$ einer Variablen.
Bilden mit ihr Riemannsche Summe. Entstehen durch Intervallzerlegung Z des Variablenintervalls I in die Teilintervalle $[t_{i-1}, t_i]$ und die Wahl von Zwischenwerten $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ und lauten

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{a}(\tau_i)\Delta t_i.$$

$\vec{a}(t)$ besteht aus Komponentenfktn. $\vec{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$
Der jeweilige Faktor Δt_i wirkt komponentenweise, die Summe ist ebenfalls komponentenweise auszuführen

$$\Rightarrow \sum_i \vec{a}(\tau_i)\Delta t_i \mathrel{\hat{=}} \left(\sum_i a_1(\tau_i)\Delta t_i, \sum_i a_2(\tau_i)\Delta t_i, \sum_i a_3(\tau_i)\Delta t_i\right)$$

Jede Komponente k des Summenvektors ist also eine gewöhnliche Riemannsumme. $\sum_i a_k(\tau_i)\Delta t_i$, $k=1,2,3$.

Im Limes immer feinerer Intervallteilung $Z\to\infty$ wird daraus jeweils das Riemannintegral.

$\Rightarrow$ somit folgende <u>Def.</u>:

<u>Das Riemannint. über eine vektorwertige Fkt.</u> ist derjenige Vektor, dessen Komponenten die jeweiligen Integrale über die Komponentenfktn. sind

$$\vec{I} = \int \vec{a}(t)\,dt \mathrel{\hat{=}} \underbrace{\left(\int a_1(t)dt,\ \int a_2(t)dt,\ \int a_3(t)dt\right)}_{\text{Zusammenfassung von drei Komponentenintegralen, die zusammen einen Vektor bilden}}.$$

Vektor

<u>Bsp.</u> Integriere $\vec{a} \mathrel{\hat{=}} (t+t^2, e^{-6t}, 1)$ über das Intervall $[0,1]$

$\to$ Int. ist ein Vektor $\vec{F}$ mit den Komponenten F_K:

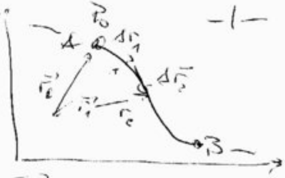
$$F_1 = \int_0^1 (t+t^2)dt = \left(\tfrac{1}{2}t^2+\tfrac{1}{3}t^3\right)\Big|_0^1 = \tfrac{1}{2}-0+\tfrac{1}{3}-0 = \tfrac{5}{6},$$

$$F_2 = \int_0^1 e^{-6t}dt = -\tfrac{1}{6}e^{-6t}\Big|_0^1 = \tfrac{1}{6}\left(1-e^{-6}\right) \approx \tfrac{1}{6}$$

$$F_3 = \int_0^1 dt = t\Big|_0^1 = 1$$

also $\vec{F} = \left(\tfrac{5}{7}, \tfrac{1}{2}(1-e^{-6}), 1\right)$

Kurvenintegral:



- Gegeben Vektorfeld $\vec{K}$ und
  Kurve $\overset{\frown}{AB}$ A – Anfangspunkt
  B – Endpunkt

i) Man zerlegen die Kurven durch Teilpunkte $P_0 = A, P_1 \ldots P_{n-1}, P_n = B$

Zerlegung heißt Z_n

ii) $\Delta\vec{r}_i = \overrightarrow{P_{i-1}P_i}$ bildet Polygonzug mit Feinheit ΔZ_n der Zerlegung Z_n

iii) Auf jedem Teilstück nehme Zwischenpunkt $\tilde{P}_i$

iv) $S_{Z_n} = \sum \vec{K}(\tilde{P}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i$

v) Wenn $|S_{Z_n} - I| < \varepsilon$ für $\forall \varepsilon > 0$ und alle Z_n mit $|\Delta Z_n| < \delta(\varepsilon)$ $\curvearrowright$ $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \vec{K}(\vec{r})\,d\vec{r}$

vi) Falls Kurvenintegral existiert keine feste Folge mit $\lim_{n\to\infty} |\Delta Z_n| \neq 0$

$$I = \lim_{n\to\infty} S_{Z_n}$$

kartesischen Koordinaten: $\vec{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z$

$$\Rightarrow d\vec{r} = \vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy + \vec{e}_z dz$$

$$\vec{K} = \vec{e}_x K_x + \vec{e}_y K_y + \vec{e}_z K_z$$

Man schreibt auch

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{K} dr = \int_{\widehat{AB}} K_x dx + K_y dy + K_z dz$$

$\widehat{AB} \rightarrow$ Parametrisierung $x(t), y(t), z(t)$

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{K} d\vec{r} = \int_{t_A}^{t_B} \Big[K_x(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} + K_y \frac{dy}{dt} + K_z \frac{dz}{dt} \Big] dt$$

stetig

Rechenregel:

$$\int_{\widehat{ABC}} \vec K(\vec r)\,d\vec r = \int_{\widehat{AB}} \vec K(\vec r)\,d\vec r + \int_{\widehat{BC}} \vec K(\vec r)\,d\vec r$$

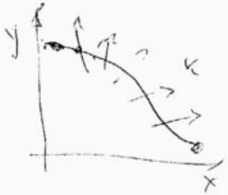
$$\int_{\widehat{AB}} \vec K(\vec r)\,d\vec r = -\int_{\widehat{BA}} \vec K(\vec r)\,d\vec r$$

$$\int_{\widehat{AB}} \left(\vec K_1(\vec r) + \vec K_2(\vec r)\right)d\vec r = \int_{\widehat{AB}} \vec K_1\,d\vec r + \int_{\widehat{AB}} \vec K_2(\vec r)\,d\vec r$$

$$\int_{\widehat{AB}} c\,\vec K(\vec r)\,d\vec r = c \int_{\widehat{AB}} \vec K(\vec r)\,d\vec r \qquad c = \text{const}$$

Mechanik: $\vec K$ - Kraftfeld

$\int_{\widehat{AB}} \vec K \cdot d\vec r$ - die Arbeit bei Verschiebung (Kraft leistet Arbeit)

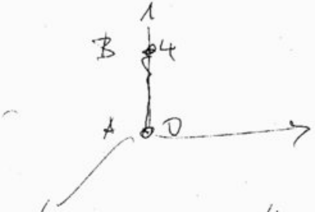


Nehme Projektion auf $\widehat{AB}$ -
Normalkomponente verrichtet — Arbeit | Tangentialkräfte

i) $\vec{K} = -mg\,\vec{e}_z$

$\int \vec{K}\cdot d\vec{r}$ — entlang $z = 0 \dots 4$

wenn $x, y = 0$ $\vec{AB}$



$$\int_{\vec{AB}} \vec{K}\,d\vec{r} = \int_0^4 (-mg)\,dz = -mgz\Big|_0^4 = \underline{\underline{-4mg}}$$

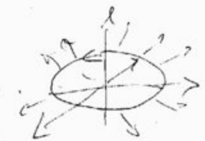
ii) $\vec{K} = -kx\,\vec{e}_x$

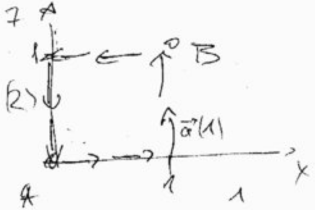
integriere von $x = 0 \dots l$ und $y, z = 0$,

$$\int_l \vec{K}\,dr = -\int_0^l kx\,dx = -\frac{k}{2}l^2$$

iii) $\vec{K}(\vec{r}) = f(r)\,\vec{r}$ Integrier: Kreislinie

$\vec{K}(r)\,d\vec{r} = 0$ $\curvearrowleft$ $1 = 0$





$$\int_{(1)} \vec{K}\, d\vec{r} = \int_0^1 K_x(x, z=0)\, dx + \int_0^1 K_z(x=1, z)\, dz$$

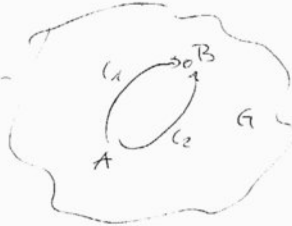
$$= a + a = 2a$$

$$\int_{(2)} \vec{K}\, d\vec{r} = \int_0^1 \underbrace{K_x(x=0, z)}_{-a}\, dz + \int_0^1 \underbrace{K_z(x, z=1)}_{-a}\, dx$$

$$= -2a$$

Wichtige Begriff: Wegunabhängigkeit

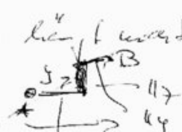
$\exists$ zwei verschiedene Kurven C_1 und C_2 zwischen A, B, dann sind die Kurvenintegrale im allgemeinen unterschiedlich



$\rightarrow \int_{C_1} \vec{k}\,d\vec{r} \neq \int_{C_2} \vec{k}\,d\vec{r}$

$\vec{K}$ heißt konservativ im G, wenn das Kurvenintegral nur von A & B abhängt

- $\vec{K}$ = Kraft $\rightarrow$ geleistete Arbeit hängt nicht vom Weg ab.



- Konservativ: rot $\vec{K}=0$ (keine Wirbel)

oder $\frac{\partial K_x}{\partial y} = \frac{\partial K_y}{\partial x}$ / $\frac{\partial K_z}{\partial y} = \frac{\partial K_y}{\partial z}$ / $\frac{\partial K_x}{\partial z} = \frac{\partial K_z}{\partial x}$

Integrabilitätsbedingung

– Potentialkräfte sind konservativ

$$\vec{K} = -\,\mathrm{grad}\,U \qquad (\mathrm{rot}\,\vec{K} = 0)$$

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{K}\,d\vec{r} = -\int_{\widehat{AB}} dU = U(A) - U(B)$$

– Jedes konservative Vektorfeld hat Potenzial

$$U(P) = U(P_0) - \int_{\widehat{P_0P}} \vec{K}\cdot d\vec{r} \qquad \hat{=}\ \text{konservativ}$$

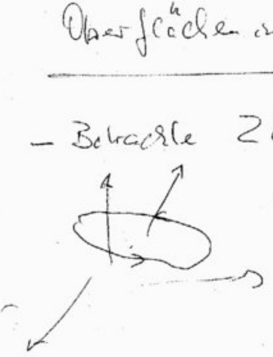
$x, y, z \qquad x_0, y_0, z_0$

Wähle $\widehat{P_0P}$ entlang der kart. Koordinaten

$$U(x,y,z) = U(x_0,y_0,z_0) - \int_{x_0}^{x} K_x(\xi, y_0, z_0)\,d\xi - \int_{y_0}^{y} K_y(x,\eta,z_0)\,d\eta - \int_{z_0}^{z} K(x,y,\zeta)\,d\zeta$$

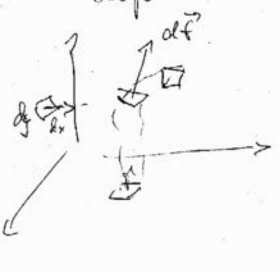
Oberflächenintegral

- Betrachte 2dim Fläche in 3d



Umrandungskurve hat Drehsinn und definiert Aussenseite (rechte Handregel)

- Zerlege Fläche in kleine Segmente $d\vec{f}$ mit Richtung in Normalenrichtung nach außen.



$$d\vec{f} = \vec{e}_x\, dy\,dz + \vec{e}_y\, dx\,dz + \vec{e}_z\, dx\,dy$$

- Im Raum gibt es $U(\vec{r})$, $\vec{K}(\vec{r})$

Dann kann man dreierlei OF integrale

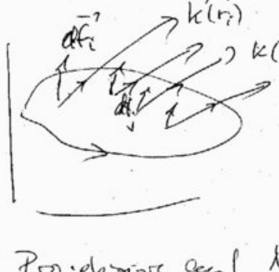
1) Fluß eines skalaren Feldes

$$\vec{P} = \lim_{\substack{\Delta f_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{N} u(\vec{r}_i)\,\Delta \vec{f}_i = \int_{(F)} u(\vec{r})\,d\vec{f}$$

$=$ Vektor

2)

Skalarer Fluß eines Vektorfeldes



Projektion auf Normale

$$Q = \lim_{\substack{\Delta f_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \vec{K}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{f}_i = \int_{(F)} \vec{K}(\vec{r}) \cdot d\vec{f}$$

3) Vektorfluß eines Vektorfeldes:

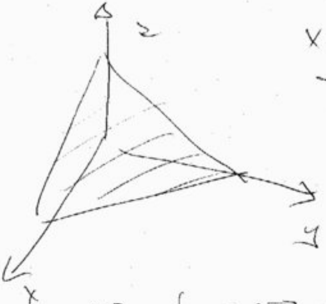
$$\vec{E} = \lim_{\substack{\Delta f_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum \vec{K}(s_i) \times \Delta \vec{f}_i = \int_{(F)} \vec{K} \times d\vec{f}$$

Kartesisch

$$\vec{P} = \iint_{(F)} U d\vec{f} = \iint_{(F)_x} U \vec{e}_x dy dz + \iint_{(F)_y} U(x,y,z) \vec{e}_y dx dz + \iint_{(F_z)} U(x,y,z) \vec{e}_z dx dy$$

$$Q = \iint_{(F_x)} K_x dy dz + \iint_{(F_y)} K_y dx dz + \iint_{(F_z)} K_z dx dy$$

⋮



$$\underline{x+y+z=1} = F$$

$$\vec{Q} = \int_{(F)} \vec{r}\, d\vec{S} = \underbrace{\int_{(F_x)} x\, dy\, dz}_{1-y-z} + \int_{(F_y)} y\, dz\, dx + \int_{(F_z)} z\, dx\, dy$$

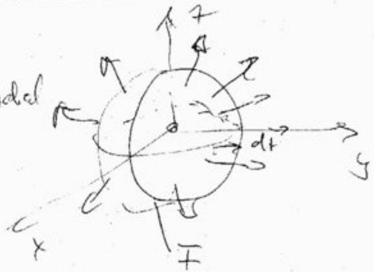
$$Q_1 = \iint_{(F_x)} (1-y-z)\, dy\, dz = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy\, (1-y-z)$$

$$= \int_0^1 dz \left(y - \frac{y^2}{2} - zy \right)\Big|_0^{1-z} = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - z + \frac{1}{2} z^2 \right) dz = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Wichtige Spezialfälle

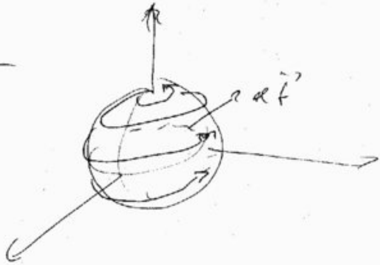
- $\vec{K}(\vec{r})$ = Radial



$\vec{K}(\vec{r}) = f(r)\,\vec{r}$ = const für $r = R_0$

$\vec{K}(\vec{r}) \parallel d\vec{f}$

$$Q = \int_{(F)} \vec{K}(\vec{r})\, d\vec{f} = K(R_0) \int_{(F)} d\vec{f} = \underline{\underline{K(R_0)\, 4\pi R_0^2}}$$

- 

$\vec{K}(r) = \vec{e}_z \times \vec{r} \perp d\vec{f}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{Q = 0}}$$