7. Lineare Algebra - Matrizen, Determinanten, Tensoren

lin. Gl.system $a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$ als Matrix-Problem:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$ bequeme Schreibweise

QM → "Matrizenmechanik"

7.1. Matrizen

1. Matrizen A vom Typ (m,n) oder kurz $A_{(m,n)}$

⇒ Systeme von m mal n Elementen, z.B. Zahlen, Fktn., Diff.quotienten..., die in m Zeilen und n Spalten angeordnet sind

$$\begin{array}{cc} A = (a_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{1. Zeile Zeilenvektor} \\ \leftarrow \text{2. Zeile} \\ \vdots \\ \leftarrow \text{m-te Zeile} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \cdots \uparrow \\ \text{1. Spalte} & \text{2. Spalte} & \text{n-te Spalte} \\ & \text{Spaltenvektor} & \end{array} & \end{array}$$

Typ einer Matrix → Matrizen werden entsprechend ihrer Zeilenzahl m und Spaltenzahl n eingeteilt

- quadratische und rechteckige Matrizen
  $m=n$ $\qquad$ $m\neq n$

2. Reelle und komplexe Matrizen

- reelle Matrizen → bestehen aus reellen Elementen
- kompl. -"- -"- kompl. -"-
  $a_{\mu\nu} + i b_{\mu\nu}$ ⇒ zwei Matrizen der Form $A + iB$

- Beziehung zw. Elementen einer komplexen Matrix A und der zur ihr konjugiert komplexen Matrix A^*

$$\underset{A}{a_{\mu\nu} + i b_{\mu\nu}} \rightarrow \underset{A^*}{a_{\mu\nu} - i b_{\mu\nu}}$$

3. Transponierte Matrix A^T

aus Matrix A entsteht durch Vertauschen der Zeilen und Spalten → transponierte Matrix A^T → vom Typ (n,m)

$$\underset{n \times m}{(a_{\mu\nu})^T} = \underset{m \times n}{(a_{\nu\mu})} \; ; \quad A^T = \left(a^T_{\mu\nu} = a_{\nu\mu} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Adjungierte Matrizen

zu einer komplexen Matrix A → adjungierte Matrix A^H, indem man die zugehörige konjugiert kompl. Matrix transponiert

$$A^H = (A^*)^T$$

5. Nullmatrix

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$ sämtliche Elemente Null

6. Quadratische Matrizen

1. Def.: Quadratische Matrizen ⇒ gleiche Anzahl von Zeilen und Spalten, d.h. $m=n$

$$A = A_{(n,n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Elemente $a_{\mu\nu}$, die sich in der Diagonalen von links oben nach rechts unten befinden, ⇒ Hauptdiagonalelemente

$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$

Diagonalmatrizen: quadratische Matrizen in denen alle außerhalb der Hauptdiagonale liegenden Elemente gleich Null sind $\quad a_{\mu\nu} = 0$ für $\mu \neq \nu$; $\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$

Spur einer Matrix: Summe der Hauptdiagonalelemente

$$Sp(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\mu}$$

Bsp.: $A \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad Sp(A) = 1 - 3 + 0 = -2$

Symmetrische Matrizen: quadr. Matrizen mit

$$A = A^T$$

Eleme liegen spiegelbildlich zur Hauptdiagonale

$$a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & & & \vdots \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

Normale Matrizen: $A^T A = A A^T$

Hermitesche (selbstadjungierte) Matrizen:

$$A = A^H = (A^*)^T$$

6)

Einheitsmatrix: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & & & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{\mu\nu})$

7. Vektoren

Matrizen vom Typ $(n,1)$ → einspaltige Matrizen oder Vektoren

$(1,n)$ → einzeilige Matrizen oder Zeilenvektoren

Spaltenvektor $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$; Zeilenvektor $a^T = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

8.

8. Rechenoperationen mit Matrizen

Gleichheit von Matrizen: $A = (a)_{\mu\nu}$ und $B = (b)_{\mu\nu}$ sind gleich, wenn sie vom gleichen Typ sind und wenn ihre gleichgestellten Elemente einander gleich sind:

$$A = B \text{ wenn } a_{\mu\nu} = b_{\mu\nu}$$

Addition u. Subtraktion: mgl. wenn Matrizen vom gleichen Typ sind ⇒ erfolgt elementweise für jeweils gleichgestellte Elemente

$$A \pm B = (a_{\mu\nu}) \pm (b_{\mu\nu}) = (a_{\mu\nu} \pm b_{\mu\nu})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Es gelten Kommutativgesetz $A + B = B + C$

Assoziativgesetz $(A+B)+C = A+(B+C)$

Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl

$$\alpha A = \alpha (a_{\mu\nu}) = (\alpha a_{\mu\nu})$$ → jedes Element mit der Zahl multipl.

Bsp.: $3 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 21 \\ 0 & -3 & 12 \end{pmatrix}$

⇒ Division durch einen Skalar γ als Multiplikation mit $\alpha = \frac{1}{\gamma}$

Multiplikation zweier Matrizen

Produkt AB → lässt sich nur bilden, wenn Spaltenzahl des linken Faktors A gleich Zeilenzahl des rechten Faktors B ist

- wenn A vom Typ (m,n) → muss B vom Typ (n,p) sein

und Produkt AB ist Matrix vom Typ: $\underset{(m,p)}{C} = (c_{\mu\lambda})$

$(c_{\mu\lambda})$ = Skalarprodukt der μ-ten Zeile des linken Faktors A mit der λ-ten Spalte des rechten Faktors B:

$$AB = \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} b_{\nu\lambda} \right) = (c_{\mu\lambda}) = C \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \dots, m \\ \lambda = 1, 2, \dots, p \end{pmatrix}$$

im Allg. $AB \neq BA$; Bsp. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & -7 & [illegible] & \end{pmatrix}$

9. Rang einer Matrix + extra Blatt

~~**Def.:** In einer Matrix A ist die größte Anzahl r der linear unabh. Spaltenvektoren stets gleich der Anzahl der linear unabh. Zeilenvektoren. Diese Zahl r heißt Rang der Matrix.~~

~~- quadr. Matrix vom Typ (n,n) heißt reguläre Matrix, wenn ihr Rang gleich n ist $\Leftrightarrow$ wenn ihre Determinante $\neq 0$ ist~~

Sei $A = (a_{ki})$ eine $r \times n$-Matrix

$B = (b_{ij})$ eine $n \times m$-Matrix

$\Rightarrow$ Produkt $A \cdot B$ die $r \times m$-Matrix C

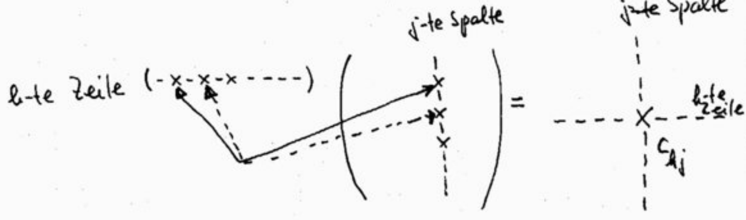
$$A \cdot B = C = (c_{kj})$$

mit $c_{kj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} b_{ij}$

(nur erklärt wenn Spaltenzahl von A = Zeilenzahl von B)

$$\underset{\updownarrow r}{\overset{\leftarrow n \rightarrow}{(A)}} \cdot \underset{\updownarrow n}{\overset{\leftarrow m \rightarrow}{(B)}} = \underset{\updownarrow r}{\overset{\leftarrow m \rightarrow}{(A \cdot B = C)}}$$

Element c_{kj} erhält man durch paarweises Multiplizieren der Elemente in der k-ten Zeile von A mit den Elementen in der j-ten Spalte von B und Aufaddieren



Rückseite

Regel zur Ermittlung des Ranges

Bei elementaren Umformungen ändert sich der Rang einer Matrix nicht.

Elementare Umformungen:

a) Vertauschung zweier Zeilen miteinander.
(Spalten)

b) Multiplikation einer Zeile oder Spalte mit einer Zahl.

c) Addition einer Zeile zu einer Zeile.
(Spalte) (Spalte)

⇒ <u>zur Bestimmung des Ranges</u> → durch geeignete Linearkombinationen der Zeilen Matrix so umformen, dass in der μ-ten Zeile $(\mu = 2, 3, \dots, m)$ mindestens die ersten $\mu - 1$ Elemente gleich Null werden

Anzahl der vom Nullvektor verschiedenen Zeilenvektoren in der so umgeformten Matrix ⇒ Rang r

<u>Bsp.:</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Zeilenrang $r = 2$, da die beiden Vektoren $(1\,0\,2)$ und $(-1\,1\,0)$ lin. unabh. sind

Spaltenrang $r = 2$, da die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ lin. unabh. sind

und $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

– Spaltenraum = Zeilenraum

Inverse oder reziproke Matrix

zu einer regulären Matrix $A = (a_{\mu\nu})$ $\exists$ eine <u>inverse Matrix</u> A^{-1}, d.h. es gilt

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Später!

Elemente von $A^{-1} = (\beta_{\mu\nu})$ sind

$$\beta_{\mu\nu} = \frac{A_{\nu\mu}}{\det A},$$

wobei $A_{\nu\mu}$ die zum Element $a_{\nu\mu}$ der Matrix A gehörende <u>Adjunkte</u> ist (später)

Fall der quadrat. Matrix vom Typ (2,2) gilt:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};\quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Rechenregeln für Matrizen

1) $AE = EA = A$

2) $AO = O$ und $OA = O$ (O - Nullmatrix)

3) auch wenn weder A noch B Nullmatrizen sind, kann ihr Produkt eine Nullmatrix ergeben

$$AB = O;\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4) $(AB)C = A(BC)$ Multiplikation dreier Matrizen

5) Transposition von Summe und Produkt zweier Matrizen

$$(A+B)^T = A^T + B^T \; ; \; (AB)^T = B^T A^T \quad (A^T)^T = A$$

(6) Inverse eines Produkts aus zwei Matrizen

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \qquad \text{später}$$)

7) Potenzieren

$$A^p = \underbrace{A \cdot A \dots A}_{p \text{ Faktoren}}$$

$$A^0 = E$$

$$A^{-p} = (A^{-1})^p$$

$$A^{p+q} = A^p A^q$$

8) Inverse Matrix:

$$B \, A = E \quad \text{dann ist } B = A^{-1}$$

9) orthogonal: $A^T = A^{-1}$ $(\det A = 1)$

- Multiplikation mit Vektoren

$$\hat{W} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{N1} & & w_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \vec{u}$$

- $\left(\hat{W} \cdot \vec{u}\right)_i = \sum_{j=1}^{N} w_{ij} v_j \qquad i = 1 \dots N$

↳ i-te Komponente

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 = c_1$$
$$v_1 x_1 + v_2 x_2 = c_2$$
$$W_{ij} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}, \ \vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Alternativ $\vec{v} \cdot \hat{W} =$

$$= (v_1 \cdots v_N) \begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1N} \\ & & \\ W_{N1} & \cdots & W_{NN} \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \left(\hat{v} \hat{W}\right)_i = \sum_{j=1}^{N} v_j W_{ji} \qquad i = 1 \dots N$$

$$\vec{u} = (u_1 + u_2, u_3 \cdots u_N)$$

- Quadratische Form

$$\vec{v}^T \cdot \hat{W} \cdot \vec{v} = \sum_{j,i=1}^{N} v_i W_{ij} v_j \quad \text{Skalar.}$$

- positive definite

$$\vec{v}^{T} \cdot \hat{W} \, \vec{v} > 0 \qquad \vec{v} \neq 0$$

- Skalarprodukt $\hat{W} = \hat{E}$

$$\vec{v} \, \hat{E} \, \vec{v} = \sum_{i,j} v_i \, \delta_{ij} \, v_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} v_i^2$$

oder einfacher

$$(v_1 \dots v_N) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} v_i^2$$

Multiplikation zweier Matrizen

Produkt AB → lässt sich nur bilden, wenn Spaltenzahl des linken Faktors A gleich Zeilenzahl des rechten Faktors B ist

- wenn A vom Typ (m,n) → muss B vom Typ (n,p) sein

und Produkt AB ist Matrix vom Typ: $\underset{(m,p)}{C} = (c_{\mu\lambda})$

$(c_{\mu\lambda})$ = Skalarprodukt der μ-ten Zeile des linken Faktors A mit der λ-ten Spalte des rechten Faktors B:

$$AB = \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} b_{\nu\lambda}\right) = (c_{\mu\lambda}) = C \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1,2,\dots,m \\ \lambda = 1,2,\dots,p \end{pmatrix}$$

im Allg. $AB \neq BA$; Bsp.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & -7 & \dots & \end{pmatrix}$$

9. Rang einer Matrix

+ extra Blatt

Def.: In einer Matrix A ist die größte Anzahl r der linear unabh. Spaltenvektoren stets gleich der Anzahl der linear unabh. Zeilenvektoren. Diese Zahl r heißt Rang der Matrix.

- quadr. Matrix vom Typ (n,n) heißt reguläre Matrix, wenn ihr Rang gleich n ist ⟺ wenn ihre Determinante $\neq 0$ ist

Regel zur Ermittlung des Ranges

Bei elementaren Umformungen ändert sich der Rang einer Matrix nicht.

Elementare Umformungen:

a) Vertauschung ~~zw~~ zweier Zeilen miteinander.
(Spalten)

b) Multiplikation einer Zeile oder Spalte mit einer Zahl.

c) Addition einer Zeile zu einer Zeile.
(Spalte) (Spalte)

⇒ <u>zur Bestimmung des Ranges</u> → durch geeignete Linearkombinationen der Zeilen Matrix so umformen, dass in der μ-ten Zeile ($\mu = 2, 3, \ldots, m$) mindestens die ersten $\mu - 1$ Elemente gleich Null werden

Anzahl der vom Nullvektor verschiedenen Zeilenvektoren in der so umgeformten Matrix ⇒ Rang r

<u>Bsp.:</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Zeilenrang $r = 2$, da die beiden Vektoren $(1\ 0\ 2)$ und $(-1\ 1\ 0)$ lin. unabh. sind

Spaltenrang $r = 2$, da die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ lin. unabh. sind

und $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

– Spaltenraum = Zeilenraum

1.3 Determinanten

Definitionen

Determinanten sind reelle oder komplexe Zahlen, die eindeutig quadratischen Matrizen zugeordnet werden.
Eine Det. n-ter Ordnung, die der Matrix $A=(a_{\mu\nu})$ vom Typ (n,n) zugeordnet ist,

→ zu n=2,3

$$D = \det A = \det(a_{\mu\nu}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

wird mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes rekursiv definiert:

$$\det A = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} A_{\mu\nu}$$ (μ fest, Entwicklung nach Elementen der μ-ten Zeile)

$$\det A = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\nu} A_{\mu\nu}$$ (ν fest, Entwicklung nach Elementen der ν-ten Spalte)

Hierbei ist $A_{\mu\nu}$ die mit dem Vorzeichen $(-1)^{\mu+\nu}$ multiplizierte Unterdeterminante des Elements $a_{\mu\nu}$.
Man nennt $A_{\mu\nu}$ Adjunkte oder algebraisches Komplement.

Unterdeterminanten

Eine Unterdet. (n-1)-ter Ordnung des Elements $a_{\mu\nu}$ einer Det. n-ter Ordnung heißt diejenige Det., die sich aus der geg. Det. durch Streichen der μ-ten Zeile und ν-ten Spalte ergibt.

Bsp.: Entwicklung einer Det. 4. Ordnung nach den Elementen der 3. Zeile

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \overset{(-1)^{3+1}}{a_{31}} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$\overset{(-1)^{3+2}}{-\,a_{32}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \overset{(-1)^{3+3}}{+\,a_{33}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$\overset{(-1)^{3+4}}{-\,a_{34}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

praktische Wert des Entwicklungssatzes → Berechnung einer Determ. höheren Grades auf Berechnung einiger Det. niedrigeren Grades reduziert

Adjunkt:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-1} & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{i-1,1} & & & & & \\ a_{i+1,1} & & & & & \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & & & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$=$ algebraisches Komplement zu a_{ik}

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^2 a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - (-1)^{(1+2)} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} (-1)^{1+3}}_{A_{13}}$$

g) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

h) für Einheitsmatrix E gilt $\det E = 1$

(i) Existiert A^{-1}, so gilt $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$)
später

Ersetzen von Adjunkten

- ersetzt man in Entwicklung einer Det. nach einer ihrer Zeilen die zugehörigen Adjunkten durch die Adjunkten einer anderen Zeile, so ergibt sich Null.

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} \overset{A^T_{\nu\lambda}}{A_{\lambda\nu}} = 0 \qquad (\mu, \lambda \text{ fest}; \lambda \neq \mu)$$

vorher für $\det A$ $\lambda = \mu$

Diese Beziehung und Entwicklungssatz ergeben zusammengefasst:

$$\hat{A}^T_{adj} \cdot \hat{A} = \hat{A} \cdot \hat{A}^T_{adj} = (\det A)\, E$$

$\Rightarrow$ inverse Matrix

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^T_{adj} \qquad \boxed{\cancel{(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{\det A} (A_{adj})_{ji}}}$$

wobei A_{adj} → Matrix, die aus den Adjunkten der Elemente von A gebildete und anschließend transponierte Matrix ist

Bsp.: Inverse Matrix A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \text{Adjunkte } A_{\mu\nu}$$

Streichen μ-ten Zeile & ν-Spalte

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$; $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

det A → Entwicklung nach 3. Zeile $A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

$$\det A = 2 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 12 = \underline{\underline{24}}$$

$$A_{adj}^{T} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 6 & 0 & -21 \\ 2 & 8 & -11 \end{pmatrix}$$

↓
adjungierte Matrix
↓
aus Adjunkten
l. Elemente von A
anschließend transponiert

$$A^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 6 & 0 & -21 \\ 2 & 8 & -11 \end{pmatrix}$$

Berechnung von Determinanten

i) Wert einer Det. zweiter Ordnung

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

ii) Wert einer Det. dritter Ordnung

Nach Regel von Sarrus, die nur für Det. dritter Ordnung gilt, erfolgt Berechnung nach folgendem Schema

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

iii) Wert einer Det. n-ter Ordnung

Entwicklungssatz

Bsp.: $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right. = 1 + 0 + 1 - (0 + 0 - 1) = \underline{\underline{3}}$$

Rückseite

Rechenregeln für Determinanten

Ziel → Vereinfachung der Auswertung von Determinanten durch geeignete Manipulationen: in eine Zeile oder Spalte möglichst viele Nullen zu bekommen oder die Matrix gar auf Dreiecksform zu bringen

Satz: Seien A, B $n \times n$-Matrizen. Dann gilt für det A:

a) $\det A = \det A^T$

b) Vertauscht man in der Matrix A zwei Spalten (Zeilen), so ändert det A das Vorzeichen

c) Addiert man zu einer Spalte (Zeile) der Matrix A eine Linearkombination der übrigen Spalten (Zeilen), so ändert sich det A nicht.

d) Multipliziert man eine Spalte (Zeile) der Matrix A mit einer Zahl α, so wird det A mit dem Faktor α multipliziert.

e) Sind in der Matrix A die Spalten (Zeilen) linear abhängig, so ist $\det A = 0$ und umgekehrt.
Eine Determinante ist gleich Null, wenn eine Zeile aus lauter Nullen besteht.

f) $\det(cA) = c^n \det A$

Laplace:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ki} A_{ki}$$

Zusätzlich gilt

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{il}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ki} A_{li}$$

Also zusammengefaßt

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{il} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} A_{li} = \det(A)\,\hat{E}$$

Bezeichne $A_{ki} = A_{ik}^{T}$ – Matrix der Adjunkten der Elemente a_{ik} [?] und transponiert

$$\Rightarrow A \cdot A_{adj}^{T} = A_{adj}^{T} \cdot A = E \det(A)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det} A_{adj}^{T}$$ Matrix der Adjunkten und transponiert

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det A = -7 - 4 = -11$$

$$\boxed{A_{adj} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \qquad A_{adj}^{T} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\cancel{A} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A^{-1} = +\frac{1}{(11)^2}\left(-11\right) = \frac{1}{11}$$

7.4 Inverse Matrizen.

Letztes Mal Determinanten:

Laplace'scher Entwicklungssatz

$$\sum_{\nu=1}^{N}{}' a_{\mu\nu} A^{adj}_{\mu\nu} = \det \hat{A}$$

Zeile — Zeile von Adjunkten

oder $\sum_{\nu=1}^{N} A^{adj}_{\nu\mu} a_{\nu\mu} = \det \hat{A}$

Spalte — Spalte von Adjunkten

Nehme andere Zeile von Adjunkten $A^{adj}_{\lambda\nu}$

oder Spalte — " — $A^{adj}_{\nu\lambda}$

$$\Rightarrow \sum a_{\mu\nu} A^{adj}_{\lambda\nu} = 0 \qquad \sum a_{\nu\mu} A^{adj}_{\nu\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{\nu=1}^{N}{}' a_{\mu\nu} A^{adj}_{\lambda\nu} = \det \hat{A}\, \delta_{\mu\lambda} \qquad \text{(Zeilen)}$$

oder $\dfrac{1}{\det A} \sum_{\nu=1}^{N} a_{\mu\nu} A^{adj}_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\lambda}$ (Spalten)

Ausdruck definiert die inverse Matrix von $\hat{A}$:

$$\hat{A}^{-1} = \frac{1}{\det\hat{A}} \left(\hat{A}^{adj}\right)^{T}$$

Für die Elemente

$$(-1)^{\lambda+\nu} \, \mathrm{Min}_{\lambda\nu}$$

$$\text{Element } \hat{A}^{-1}_{\nu\lambda} = a^{-1}_{\nu\lambda} = \frac{1}{\det\hat{A}} \hat{A}^{adj}_{\lambda\nu}$$

Element d. Matrix der Adjunkte

$$\Rightarrow \hat{A}\cdot A^{-1} = \sum_{\nu=1}^{N} a_{\mu\nu}\, a^{-1}_{\nu\lambda} = \delta_{\mu\lambda}$$

Analog für Spalten

$$\sum_{\nu=1}^{N} A^{adj}_{\nu\lambda}\, a_{\nu\mu} = \det\hat{A}\ \delta_{\lambda\mu}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{A^{adj}_{\nu\lambda}}{\det A}\, a_{\nu\mu} = \delta_{\lambda\mu} = \sum a^{-1}_{\lambda\nu}\, a_{\nu\mu}$$

$$A^{-1}_{\lambda\nu} = \left(a^{-1}\right)_{\lambda\nu} = \frac{1}{\det A} A^{adj}_{\nu\lambda}$$

Probe:

$$- \; A \cdot A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & -a_{11}a_{12} + a_{12}a_{11} \\ a_{21}a_{22} - a_{22}a_{21} & -a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22} \end{pmatrix} = \hat{E}$$

$$- \; A^{-1} \cdot A = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \hat{E}$$

$$\Rightarrow \hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{A}\cdot\hat{A}^{-1} = \hat{E}$$

mit $\left(A^{-1}\right)_{\lambda\nu} = \frac{1}{\det\hat{A}}\, A^{adj}_{\nu\lambda}$

1.) Bsp. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det A$

$$A^{adj} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$a^{-1}_{11} = \frac{1}{\det A}\, a_{11} \qquad a^{-1}_{22} = \frac{1}{\det A}\, a_{22}$$

$$a^{-1}_{21} = \frac{1}{\det A}\, A^{adj}_{12} = -\frac{a_{21}}{\det A}$$

$$a^{-1}_{12} = \frac{1}{\det}\, A^{adj}_{21} = -\frac{1}{\det A}\, a_{12}$$

$$A^{-1} = \{a^{-1}_{ij}\} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

2.Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 24$$

Adjunkte: $A^{adj}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$; $A^{adj}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

$A^{adj}_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ ------

$$\hat{A}^{adj^T} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, & -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, & -\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, & -\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0, & 0, & 12 \\ 6, & 0, & 0 \\ 2 & 8, & -11 \end{pmatrix}$$

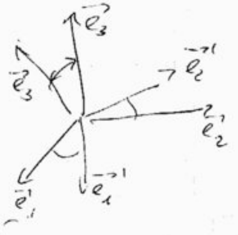
$$A^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 0, & 0, & 12 \\ 6 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & -11 \end{pmatrix}$$

$$- \quad AA^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 7, & 4, & 0 \\ 1, & -1, & 3 \\ 2, & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & 0, & 12 \\ 6, & 0, & -21 \\ 2, & 8, & -11 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

$-$

7.5. Drehung von Koordinaten: Drehmatrix



Entwickle Basisvektoren:

$$\vec{e}_i' = \sum_{j=1}^{3} d_{ij}\, \vec{e}_j \qquad i = 1 \dots 3$$

$$\Rightarrow d_{ij} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{31} & \cdots & d_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{Drehmatrix}$$

$$d_{ij} = d_{ji} = \cos\varphi_{ij} \qquad \varphi_{ij}\ \sphericalangle\ \vec{e}_i', \vec{e}_j$$

$$\Rightarrow x_i' = \sum_{j=1}^{3} d_{ij}\, x_j \qquad i = 1 \dots 3$$

$$\vec{r}' = \vec{r}'$$

$$\sum x_j' \vec{e}_j' = \sum x_j \vec{e}_j \quad \Big|\ \cdot \vec{e}_i'$$

$$\Rightarrow x_i' = \sum x_j\, \vec{e}_j \cdot \vec{e}_i'$$

$$= \sum d_{ij}\, x_j$$

Drehung um z Achse mit φ

$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi$

$y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi$

$z' = z$

$$D = \begin{pmatrix} \cos\varphi, & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$

$y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$

$z = z'$

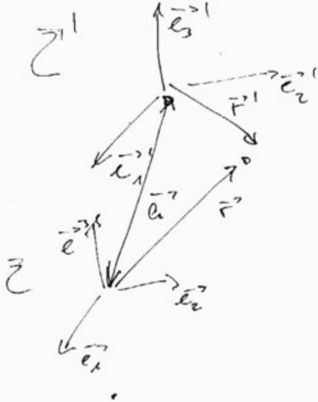
$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D D^{-1} = D^{-1} D = \hat{E}$$

1.4 Koordinatentransformationen

1.4.1 Translation

Transformation zwischen zwei Koordinatensystemen mit parallelen Achsen



$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ in Σ

$\vec{r}\,' = (x_1', x_2', x_3')$ in Σ'

$x_1' = x_1 + a_1$

$x_2' = x_2 + a_2$

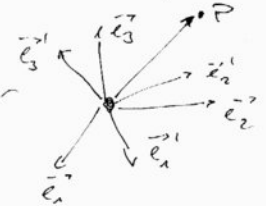
$x_3' = x_3 + a_3$

$\vec{r}\,' = \vec{r} + a$

7.4 ~~1.4~~ Koordinatentransformationen

~~1.4.2~~ Drehung

Betrachte zwei Koordinatensysteme mit gemeinsamem Ursprung



– 2 –

Keine Translation ⟶ Drehung

Ortsvektor von P : $\vec r = \vec r\,'$

aber zwei Darstellungen:

$$\vec r = (x_1, x_2, x_3)^T \qquad \vec r\,' = (x_1', x_2', x_3')^T$$

i) Transformation der Basisvektoren

$$\vec e_j\,' = \sum_k d_{jk}\, \vec e_k$$ Linearkombination der alten Einheitsvektoren

$$\vec e\,' = D \cdot \vec e$$

$$\Rightarrow \vec{r}' = \hat{D}\,\vec{r}$$

wobei $\vec{r}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$; $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Inverse Matrix:

$$\vec{r} = \hat{D}^{-1}\,\vec{r}'$$

$$\sum x_j' \vec{e}_j{}' = \sum x_j \vec{e}_j \quad | \cdot \vec{e}_i$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_j' d_{ji} = x_i$$

$$\Rightarrow x_i = \sum_{j=1}^{3} x_j' d_{ji} = \sum_{j=1}^{3} d_{ij}^{-1} x_j'$$

$$\Rightarrow d_{ij}^{-1} = d_{ji} = d_{ij}^{T}$$

$$\underline{\underline{\hat{D}^{-1} = D^{T}}}$$

$$\det \hat{D}^T = \det \hat{D} = \frac{1}{\det D^{-1}} \curvearrowright \underline{\underline{\det \hat{D} = 1}}$$

$$\delta_{ij} = \sum d_{in}^{-1} d_{mj} = \sum_{m=1}^{3} d_{mi} d_{mj} = \sum_{m=1}^{3} d_{im} d_{jm}$$

$$\vec{e}_j^{\,\prime} \cdot \vec{e}_m = \sum_k d_{jk} \underbrace{\vec{e}_k \cdot \vec{e}_m}_{\delta_{km}}$$

$$= \sum_k d_{jk}\, \delta_{k,m} = d_{jm}$$

$$\Rightarrow d_{jm} = \vec{e}_j^{\,\prime} \cdot \vec{e}_m = \cos \varphi_{jm}$$

$$\sphericalangle(\vec{e}_j^{\,\prime}, \vec{e}_m)$$

$\Rightarrow$ Drehmatrix

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & \cdots & \cdots \\ d_{31} & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

mit $d_{ij} = \cos \varphi_{ij}$

ii) Transformation der Komponenten

aus $\vec{r}\,' = \vec{r} \Rightarrow$

$$\sum_j x_j' \vec{e}_j\,' = \sum_j x_j \vec{e}_j \quad \Big| \cdot \vec{e}_i\,'$$

$$\underbrace{\sum_j x_j' \vec{e}_j\,' \cdot \vec{e}_i\,'}_{x_i'} = \sum_j x_j \vec{e}_j \cdot \vec{e}_i\,'$$

$$= \sum_j x_j \underbrace{\vec{e}_i\,' \vec{e}_j}_{d_{ij}} \qquad \sphericalangle\, \vec{e}_i\,', \vec{e}_j$$

$$\Rightarrow x_i' = \sum_j d_{ij} x_j$$

Kompakte Schreibweise

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{33} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & \cdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

oder:

$$\vec{r}\,' = \hat{D}\,\vec{r}$$

iii) Umkehrtransformation

bilde inverse Matrix D^{-1}

$$\vec{r} = D^{-1}\,\vec{r}\,'$$

$$D^{-1} \cdot D = D\,D^{-1} = E \quad \text{- Einheitsmatrix}$$

Behauptung $D^{-1} = D^{T} \Rightarrow (d^{-1})_{ij} = d_{ji}$

Beweis:

$$\Rightarrow \sum x_j'\,\vec{e}_j\,' = \sum x_j \cdot \vec{e}_j \quad \Big| \cdot \vec{e}_i$$

$$\sum x_j'\,\underbrace{\vec{e}_j\,' \cdot \vec{e}_i}_{d_{ji}} = \sum_j x_j \cdot \underbrace{\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i}_{\delta_{ji}} = x_i$$

$\measuredangle\, \vec{e}_j\,', \vec{e}_i$

$$\Rightarrow x_i = \sum_j d_{ji}\, x_j'$$

iv) Eigenschaften der Drehmatrix

$$E = D^{-1} D = D D^{-1} \qquad D^{-1} = D^T$$

$$c_{ij} = \sum a_{im} b_{mj} =$$

$$= \sum (d^{-1})_{im} d_{mj} =$$

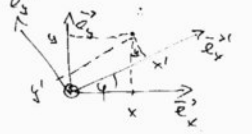
$$\delta_{ij} = \sum_m d_{mi} d_{mj} = d_{1i} d_{1j} + d_{2i} d_{2j} + d_{3i} d_{3j}$$

oder

$$\delta_{ij} = \sum_m d_{im} d_{jm} \qquad \text{weil } \det D = \det D^T$$

$$\det(D) = 1$$

v) Drehung in x,y Ebene um z-Achse.



$$\sphericalangle\, e_x' \vec e_x = \varphi$$

$$\sphericalangle\, \vec e_y', \vec e_y = \varphi$$

$$\sphericalangle\, \vec e_x', \vec e_y = \frac{\pi}{4} - \varphi$$

$$\sphericalangle\, \vec e_y', e_x = \frac{\pi}{4} + \varphi$$

$$d_{11} = \cos\varphi \qquad d_{22} = \cos\varphi$$

$$d_{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi \qquad d_{21} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin\varphi$$

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = z \end{cases}$$

und umgekehrt:

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \\ z = z' \end{cases}$$

$$D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7.6 Lineare Gleichungssysteme:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1N}x_N = \alpha_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N = \alpha_2$$

$$\vdots$$

$$a_{N1}x_1 + \dots\dots + a_{NN}x_N = \alpha_N$$

- N-Gleichungen für N-Unbekannte x_i:

$$\hat{A}\vec{x} = \vec{\alpha} \quad ; \quad \sum_{i=1}^{N} A_{ik}x_k = \alpha_i$$

- Allgemeiner: N-Gleichungen für M Unbekannte
  $N < M$ unterbestimmt, $N > M$ überbest.
- Wenn $\vec{\alpha} = 0$ ~ homogenes System
  $\vec{\alpha} \neq 0$ ~ inhomogenes System
- Wichtige Frage: Lösbarkeit des Systems
  wenn lösbar: wieviele Lösungen?

Schreiben, als

$$x_1 \left(A_{1k} a_{11} + A_{2k} a_{21} + \dots \right) + x_2 \left(A_{3k} a_{21} + \dots \right)$$

$$+ \dots + x_N \left(A_{1k} a_{1N} \dots \right) =$$

~~Erinnere~~ $\cancel{\sum_{\mu=1}^{N} A_{\mu\nu} a_{\mu\lambda} = (\det \hat{A}) \delta_{\nu\lambda}}$

Erinnere $\sum_{\nu=1}^{N} A_{\nu\mu} a_{\nu\lambda} = (\det \hat{A}) \delta_{\mu\lambda}$

$$\Rightarrow x_k \det \hat{A} = A_{1k} b_1 + A_{2k} b_2 + \dots A_{Nk} b_N$$

$$\Rightarrow x_k = \frac{1}{\det \hat{A}} \left(A_{1k} b_1 + A_{2k} b_2 + \dots + A_{Nk} b_N \right)$$

$$k = 1 \dots N$$

Cramersche Regel

$$\hat{A} \vec{x} = \vec{b} \rightarrow \hat{A}^{-1} \hat{A} \vec{x} = \hat{A}^{-1} \vec{b}$$

$$\rightarrow \vec{x} = \hat{A}^{-1} \vec{b}$$

Schreibe Matrix anders:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{j1} \\ \vdots \\ a_{N1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{N2} \end{pmatrix} + \dots + x_N \begin{pmatrix} a_{1N} \\ \vdots \\ a_{jN} \\ \vdots \\ a_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix}$$

Spaltenvektoren

- Frage der Lösbarkeit wird auf Unabhängigkeit der Spaltenvektoren zurückgeführt.
- Rang der Matrix $\hat{A}$ - ? $\underline{\underline{Rg(A) = r = N}}$ - ?

Betrachte zuerst homogene Systeme

7.5 Lineare Gleichungssysteme

1. Definition und Lösbarkeit

Lineares Gl.system

Ein System von n lin. Gln. mit m Unbekannten

$x_1, x_2, \dots, x_m$

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= \alpha_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= \alpha_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m &= \alpha_n
\end{aligned}\right\} \quad (*)$$

bzw. in Kurzform $Ax = \alpha$

heisst ein lin. Gl.system. Dabei bedeuten

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}; \quad a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Koeffizientenmatrix   Absolutglieder

Wenn Spaltenvektor $\underline{\alpha} = 0 \Rightarrow$ homogenes Gl.system

$\alpha \neq 0 \Rightarrow$ inhom. Gl.system

$n < m$ unterbestimmt $n > m$ überbestimmt

2. Lösbarkeit des lin. Gl.systems

- untersuchen Frage, ob vorgeg. lin. Gl.system

$$Ax = \kappa$$

Lösungen besitzt und wenn ja, wieviele

- $\exists$ genau eine Lsg. $\Rightarrow$ lin. Gl.system eindeutig lösbar
- Vorgehen für hom. und inhom. System unterschiedlich
  $\Rightarrow$ getrennt behandeln

a) homogenes lin. Gl. system

$$Ax = 0$$

Satz: Ein hom. Gl.system $Ax=0$ hat immer die sog. triviale Lösung $x=0$, d.h. $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$.

Im Fall von m Zeilen und n Spalten ist
Die Lsg. ~~ist~~ die einzige, wenn m Spaltenvektoren

$$\vec{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix};\ i = 1,2,\dots,n \quad \text{lin. unabh. sind,} \Longleftrightarrow \mathrm{Rg}(A) = n.$$

~~oder dies~~

Anzahl d. Unbekannten

$\Rightarrow$ erforderlich, dass $m \geq n$, d.h. es darf nicht weniger Gln. als Unbekannte geben

Anzahl d. Gln.

← vorgehen

Im Fall von n Zeilen + m Spalte

m-Unbekannte, n-Gleichungen

1319

$$\begin{pmatrix} a_{11} \cdots\cdots + a_{1m} \\ \\ a_{i1} \cdots\cdots + a_{im} \\ \\ a_{n1} \cdots\cdots + a_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schreibe anders!

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{j,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} + \cdots + x_i \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ji} \\ \vdots \\ a_{n,i} \end{pmatrix} + \cdots + x_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{jm} \\ \vdots \\ a_{n,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

m Spaltenvektoren ~~[illegible]~~ ~~oder~~ $(n,1)$
$(n,1)$

Satz: Die triviale Lsg ist die einzige, wenn die m Spaltenvektoren linear unabhängig sind. $\rightsquigarrow Rg(A) = m$
$\Rightarrow$ Erforderlich dazu $m \leq n$ (Ausnahme ist $Rg(A) \leq n < m$)

⇒ **Satz:** Ein hom. lin. Gl.system $Ax=0$ ~~ist~~ mit (n,m)- $n\times m$-Matrix A und $(m,1)$- $m\times 1$-Matrix x $n\{\left(\begin{smallmatrix} m \\ \ \end{smallmatrix}\right)$ ist genau dann eindeutig lösbar (mit der trivialen Lsg. $x=0$), wenn $Rg(A)=m$.

m = Zahl der Unbekannten ($n \geq m$)

Ist $Rg(A) < m \Rightarrow$ ex. nichttriviale Lsgn.

- Am häufigsten Fall $\underline{m=n}$ (m Gln. für m Unbekannte)

⇒ Resultate spezialisieren:

Satz: Ein homogenes Gl.system $Ax=0$ mit einer
(Δ) (m,m)- $m\times m$-Matrix A und einer $(m,1)$- $m\times 1$-Matrix x ist genau dann eindeutig lösbar (mit der trivialen Lsg. $x=0$), wenn $\det A \neq 0$ (d.h. $Rg(A)=m$)

(Da dann A^{-1} ex., folgt sofort $A^{-1}\cdot Ax = x =$
$= A^{-1}\cdot 0 = 0$).

Ist $\det A = 0$, so ~~ist die~~ können in der allgem. Lsg. $m - Rg(A)$ Unbekannte als freie Parameter gewählt werden.

Bsp.:

i) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 \quad &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$8x^2, 6x^2$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow Rg(A) = 3$$

s. oben

$\Rightarrow$ eindeutige Lsg. ist also $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

ii) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 \quad &= 0 \\ 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ 3. Gl. Differenz der beiden anderen

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow Rg(A) < 3$$

Unterdeterm. $\det A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow Rg(A) = 2$

erhält allg. Lsg. beispielsweise durch Eliminationsverfahren

$\rightarrow$ geschicktes Bilden von Linearkombinationen einzelner Gln.

die Zahl der Variablen schrittweise verringern aus 2. Gl. $\Rightarrow$ $x_1 - x_2 = 0$; $\boxed{x_1 = x_2}$

aus 3. Gl. $\Rightarrow$ $2x_2 = -x_3$; $x_2 = -\frac{1}{2}x_3$

$\Rightarrow$ Lsg.: $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}x_3$; $m - Rg(A) = 3 - 2 = 1$

$\Rightarrow$ 1 freier Parameter

v) Inhomogenes lin. Gl. System

zu lösen ist $A \cdot x = \alpha$ mit $\alpha \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ notwendiges und hinreichendes Kriterium für Ex von Lsgn.:

Satz: Das inhomogene lin. Gl.system $Ax = \alpha$ mit einer $n \times m$-Matrix A, einer $m \times 1$-Matrix x und
(n,m) $(m,1)$
einer $n \times 1$-Matrix $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ ist genau dann lösbar,
$(n,1)$

wenn die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1m} \\ \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nm} \end{pmatrix} \text{ und } A^0 = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1m} & \alpha_1 \\ \vdots & \alpha_2 \\ & \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nm} & \alpha_n \end{pmatrix}$$

erweiterte Koeffizientenmatrix

denselben Rang haben.

- Wann lösbares inhom. lin. Gl.system <u>eindeutig lösbar</u>?

- nehmen an, wir hätten zwei Lsgn. x_1 und x_2

$$A x_1 = \alpha \; ; \; A x_2 = \alpha \rightarrow A(x_1 - x_2) = 0$$

- Differenz zweier Lsgn. des inhom. Problems muss also eine Lsg. des hom. Problems sein
- umgekehrt: durch Addition einer Lsg. des homogenen Problems wieder eine Lsg. des inhom. Problems

<u>Satz:</u> Die allg. Lsg. eines lösbaren inhom. lin. Gl.systems $A \cdot x = \alpha$ setzt sich additiv zusammen aus einer spez. Lsg. x_{spez} und der allg. Lsg. $\tilde{x}_{hom}$ des zugehörigen hom. Systems $A \cdot x = 0$:

$$x_{gesamt} = x_{spez} + \tilde{x}_{hom} \quad \text{mit } A x_{spez} = \alpha, \; A \tilde{x}_{hom} = 0$$

weiter folgt sofort:

<u>Satz:</u> Ein lösbares inhom. lin. Gl.system $A \cdot x = \alpha$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn das zugehörige hom. System $A \cdot x = 0$ nur die triviale Lsg. besitzt.

Auflösung linearer Gleichungssysteme:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1N}x_N = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{N1}x_1 + \ldots \quad a_{NN}x_N = b_N$$

$$\hat{A}\vec{x} = \vec{\alpha} \qquad \hat{A} = (N,N) \quad \vec{x} = (1,N) \quad \vec{\alpha} = (1,N)$$

Annahme $\det \hat{A} \neq 0$:

Multipliziere $\underbrace{\text{r.h.s}}^{\text{in } i\text{-te Zeile}}$ und l.h.s. mit A^{adj}_{ik} und addiere.

$$\text{rhs:} \quad A^{adj}_{1k}b_1 + A^{adj}_{2k}b_2 + \ldots + A_{Nk}b_N \quad \left(\begin{matrix}\text{gibt es}\\ k=1\ldots N \text{ mal}\end{matrix}\right)$$

l.h.s.:

$$A_{1k}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1N}x_N) + A_{2k}(a_{21}x_1 + \cdots + a_{2N})$$

$$+ \cdots + A_{Nk}(a_{N1}x_1 + \cdots + a_{NN}x_N) = \ldots\ldots$$

Geometrische Bedeutung: $x_k = \frac{1}{\det \hat{A}} \det(\hat{A}_k^x)$

$$\det A_k^x = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots a_{1k-1} & \alpha_1 & a_{1k+1} & & a_{1n} \\ a_{21} & \vdots & \alpha_2 & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{nk-1} & \alpha_n & a_{nk+1} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Bsp:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 \quad &= 2 \\ x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned} \quad \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\det \hat{A} = 3 \neq 0 \curvearrowright$ Cramersche Regel:

$$x_1 = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}\,; \quad x_2 = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{2}{3}$$

$$x_3 = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}$$

- Resultate f. wichtigen Fall quadrat. Matrizen spezialisieren

$Ax=\alpha$, A $m\times m$-Matrix; $(m,1)$-Matrizen x und α ~~mx-1~~

Fallunterscheidung gemäß $\det A = 0$ und $\det A \neq 0$

i) $\det A = 0$

Die Existenzbedingung f. Lsgn. (d.h. für ein x_{spez}) lässt sich nicht vereinfachen. $\tilde{x}_{hom}$ folgt aus Satz (Δ) für eindeutige Lsg. einer hom. Systems

ii) $\det A \neq 0$

es gilt $Rg(A) = m$ = maximal, so dass gelten muss $Rg(A) = Rg(A^0)$ für jedes α

· ex. also immer eine Lsg., die darüberhinaus eindeutig sein muss, da $\tilde{x}_{hom} = 0$ ist

· da A^{-1} ex., lässt sich Lsg. sofort hinschreiben:

$$\text{aus } A\cdot x = \alpha \text{ folgt } A^{-1}\cdot A\cdot x = x = A^{-1}\cdot\alpha$$

$$\left(A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_{adj}\right) \Rightarrow x = A^{-1}\cdot\alpha = \frac{1}{\det A} A_{adj}\cdot\alpha$$

also für die i-te Zeile

$$x_i = \frac{1}{\det A}(A_{adj}\,\alpha)_i = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{m}(a_{ik})_{adj}\cdot\alpha_k = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{i+k}\det U_{ki}\cdot\alpha_k$$

- Vergleichen diese Summe mit Entwicklung von $\det A$ nach der i-ten Spalte $\Rightarrow$ lediglich a_{ki} durch α_k ersetzt

- Vorliegende Summe liefert also die Det. einer solchen Matrix, die sich von A lediglich dadurch unterscheidet, dass die i-te Spalte durch α ersetzt wird

$$\Rightarrow \quad x_i = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \alpha_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \alpha_n & & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

i-te Spalte

Cramersche Regel

Bsp.: 1) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$x_1 - x_2 = 2$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
$x_2 - x_3 = -1$

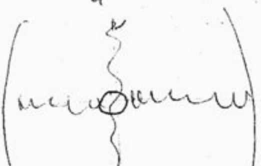
$$\left(A^{-1}\right)_{ij} = \frac{1}{\det A}\left(A_{adj}\right)_{ji}$$

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \left(A^{-1}\right)_{ij} \alpha_j$$

$$x_i = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} \left(A_{adj}\right)_{ji} \alpha_j \qquad i = 1 \ldots n$$

Spalte Zeilen $\to (-1)^{i+k} \det U_{ki}$

Unterdeterminante durch Wegstreichen der j-ten Zeile und i-ten Spalte



$\det A = 3 \neq 0 \Rightarrow$ Cramersche Regel liefert die eindeutige Lsg.

$$x_1 = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{4}{3}; \quad x_2 = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{2}{3};$$

$$x_3 = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}$$

2) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 \qquad &= 2 \\ 2x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$Rg(A) = 2$ und $\tilde{x}_{hom} =$

7.3 Eigenwertaufgaben bei Matrizen

1. Allgemeines EW-Problem

- A und B zwei quadrat. Matrizen-(n,n)
  Elemente $\in \mathbb{R}$ oder $\in \mathbb{C}$
- Aufgabe → Zahlen λ und zugehörige Vektoren $\vec{x} \neq 0$ mit

$$\boxed{A\vec{x} = \lambda B \vec{x}}$$

zu bestimmen → allg. EW-Problem

Zahl λ → Eigenwert, der Vektor $\vec{x}$ - Eigenvektor

- ein EV lediglich bis auf einen Faktor bestimmt, da mit $\vec{x}$ auch $c\vec{x}$ ($c = \text{const}$) EV zu λ ist!
- Spezialfall $B = E$ (Einheitsmatrix)

$$\boxed{A\vec{x} = \lambda \vec{x} \text{ bzw. } (A - \lambda E)\cdot\vec{x} = 0}$$

spezielles EW-Problem

- tritt in vielen Anwendungen auf

z.B. Diff.gl. für (harm.) Osz. $\ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma \dot{x} = 0$
(gekoppelte)

$y = \dot{x} \Rightarrow$ System $\quad \dot{x} = y$
$\qquad \dot{y} = -\omega_0^2 x - \gamma y$ $\quad$ Rückseite

$y, x \sim e^{\lambda t}$

$\lambda x = y,\ \lambda y = -\omega_0^2 x - \gamma y$

2. Spezielles EW-Problem

2.1 Charakteristisches Polynom

EW-Gl. $Ax = \lambda x$; bzw. $(A - \lambda E)x = 0 \rightarrow$ homogenes lin. Gl.system $\rightarrow$ besitzt genau dann nichttriviale Lsgn. $\vec{x} \neq 0$ wenn

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

- durch Entw. von $\det(A - \lambda E| \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= P_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

- Eigenwertbedingung $\hat{=}$ Polynomgl. $\Rightarrow$ <u>charakt. Gl.</u>
  Polynom $P_n(\lambda)$ – <u>charakt. Polynom</u>
  Nullstellen $\rightarrow$ EW der Matrix A
- Damit gilt für bel. (n,n)-Matrix:

1. Fall: Matrix A $^{(n,n)-}$ besitzt genau <u>n EW</u>
$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ denn Polynom vom Grade n hat n Nullstellen, wenn diese entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt werden
(EW von symm. $^{A=A^T}$ Matrizen reell, von nichtsymm. Matrizen $\rightarrow$ können EW komplex sein)

2. Fall: Sind die n EW der (n,n)-Matrix A sämtlich verschieden, dann ex. genau <u>n lin. unabh. EV $\vec{x}$</u> als Lsgn. des System $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ mit $\lambda = \lambda_i$

3. Fall: Ist λ_i ein n_i-facher EW und hat die Matrix $A - \lambda_i E$ den Rang r_i, dann ist die Zahl der lin. unabh. EV, die zu λ_i gehören, gleich dem sogenannten <u>Rangabfall</u> $n - r_i$.

Es gilt $1 \leq n - r_i \leq n_i$, d.h. zu einer reellen oder komplexen quadrat. $^{(n,n)-}$Matrix A gibt es mindestens einen und höchstens n reelle oder kompl. lin. unabh. EV.

<u>Bsp.:</u> a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\quad A\vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ 3 & 1-\lambda & 3 \\ -5 & 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda = 0$$

charakt. Gl.

EW sind: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$; 3 verschiedene EW ~~[illegible]~~

EV aus zugehörigen homog. lin. Gl.systemen bestimmt

1) $\lambda_1 = 0$:
$$\begin{aligned} &(1)\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ &(2)\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ &(3)\ -5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{aligned}$$
$\Big\} \Rightarrow$ addieren $\to$ 1. Gl.

$\Rightarrow$ erhält x_1 beliebig, $x_2 \overset{3\cdot(1)-(2)}{=} \frac{3}{10}x_1$, $x_3 \overset{\text{aus }(1)}{=} -2x_1 + 3x_2 = -\frac{11}{10}x_1$

man wählt $x_1 = 10 \Rightarrow$ EV: $\vec{x}_1 = C_1 \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix}$; C_1 - bel. Konst.

2) $\lambda_2 = 1$: zug. hom. System $\Rightarrow$ x_3 beliebig, $x_2 = 0$, $\begin{pmatrix} 1, & -3, & 1 \\ 3, & 0 & 3 \\ -5, & 2, & -5 \end{pmatrix}$

$x_1 = 3x_2 - x_3 = -x_3$ $\boxed{\rightarrow \text{in zweite Gleichung einsetzen} \Rightarrow x_2 = 0}$

man wählt $x_3 = 1 \Rightarrow$ EV: $\vec{x}_2 = C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ — in dritte Gleichung einsetzen $\Rightarrow x_1 = -x_3$

3) $\lambda_3 = -2$; zug. hom. System → x_2 beliebig,

$$x_1 = \frac{4}{3}x_2, \quad x_3 = -4x_1 + 3x_2 = -\frac{7}{3}x_2$$

man wählt $x_2 = 3 \Rightarrow$ EV $\vec{x}_3 = C_{13}\begin{pmatrix}4\\3\\-7\end{pmatrix}$

<u>Bsp. b)</u>: $A = \begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\1 & 4 & 1\\-1 & 0 & 3\end{pmatrix}$; $\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix}3-\lambda & 0 & -1\\1 & 4-\lambda & 1\\-1 & 0 & 3-\lambda\end{vmatrix} =$

$= -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 32\lambda + 32 = 0$

EW → $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$; $\lambda = 4$ 2-facher EW

1) $\lambda_1 = 2$: man erhält x_3-bel., $x_2 = -x_3$, $x_1 = x_3$
und wählt z.B. $x_3 = 1$
EV: $\vec{x}_1 = C_{11}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

2) $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$: man erhält x_2, x_3 beliebig und $x_1 = -x_3$
2-facher EW → Rangabfall s. Rückseite
zwei lin. unabh. EV ergeben sich z.B. für
$x_2 = 1, x_3 = 0$ und $x_2 = 0, x_3 = 1$: $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$
$\vec{x}_2 = C_{..}\begin{pmatrix}0\\1\\ \end{pmatrix}$; $\vec{x}_3 = C_{12}\begin{pmatrix}-1\\0\\ \end{pmatrix}$

$\underline{142}$:

$$\begin{vmatrix} 2, & -3, & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \hat{A} \quad ; \quad \hat{A}\vec{x} = \lambda \vec{x}$$

Bestimme Eigenvektoren und Eigenwerte λ

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda, & -3, & 1 \\ 3, & 1-\lambda, & 3 \\ -5, & 2, & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \curvearrowright \det(\hat{A} - \lambda\hat{E}) = 0$$

$$\curvearrowright \text{Lsg } \vec{x} \neq 0$$

$\curvearrowright -\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda = 0$ charakteristische Gleichung

$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \,;\; \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \quad \lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = 1, -2$

$\Rightarrow 1)\ \lambda = 0 \quad 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \quad (1)$

$3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \quad (2)$

$-5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \quad (3)$

$(1) + (2) + (3) = 0$: Wähle x_1 beliebig $\curvearrowright$ $(1+2) \curvearrowright x_2 = \frac{3}{10} x_1$

$(1) \curvearrowright x_3 = -\frac{11}{10} x_1$

142 a)

$$\Rightarrow \vec{x}_{\lambda_1} = c_1' \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix}, \text{ wenn } x_1 = 10$$

2) $\lambda_2 = 1$

$$x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \quad (1)$$
$$3x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 0 \quad (2)$$
$$-5x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \quad (3)$$

$(2) \leadsto x_1 = -x_3$

$(1) \leadsto x_2 = 0$

Nehme x_3 beliebig $x_3 = 1 \leadsto \vec{x}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) $\lambda_3 = -2$

$$4x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \quad (1)$$
$$3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \quad (2)$$
$$-5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \quad (3)$$

$$7x_1 + 4x_3 = 0 \quad (1+2)$$
$$-3x_1 + 4x_2 = 0 \leadsto (2+3)$$

$\Rightarrow x_1 = \frac{4}{3}x_2 \quad x_3 = -\frac{7}{4}x_1 = -\frac{7}{3}x_2 \quad x_2 = 3$

$$\Rightarrow \vec{x}_{\lambda_3} = c_1' \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

143

Bsp: $\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$

$$\cancel{-(4-\lambda)\left[(3-\lambda)^2 + (4-\lambda)\right] = (4-\lambda)(-5+5\lambda-\lambda^2)}$$

$$\cancel{0 = \lambda^2 + 5\lambda + 1 \rightsquigarrow \lambda = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 1}}$$

$$(3-\lambda)^2(4-\lambda) - (4-\lambda) = (4-\lambda)\left((3-\lambda)^2 - 1\right)$$

$$(3-\lambda)^2 - 1 = 9 - 1 - 6\lambda + \lambda^2 =$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \rightsquigarrow \lambda = +3 \pm \sqrt{9-8} = 2, 4$$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 4$$

1) $\lambda_1 = 2$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x_3 &= x_1 \\ x_2 &= -x_1 \end{aligned} \rightsquigarrow \vec{x}_1 = c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

if $x_1 = 1$

143-a)

2) $\lambda_2 = \lambda_3 = 4 \leadsto x_2, x_3$ beliebig

(1) $-x_1 - x_3 = 0 \leadsto x_1 = -x_3$

Konstruiere 2 unabhängige Eigenvektoren

i) $\Rightarrow x_2 = 1 \; ; \; x_3 = 0 \leadsto \vec{x}^{(1)}_{\lambda_{2/3}} = C_1' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

ii) $\Rightarrow x_2 = 0 \quad x_3 = 1 \qquad x^{(2)}_{\lambda_{2/3}} = C_1' \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{x}_{\lambda_1 + \lambda_2} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7.4.)

3. Reelle symm. Matrizen, Ähnlichkeitstransf.

Diagonalisierung.

- für das spez. EW-Problem $A\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}$ gelten im Falle einer reellen symm. Matrix A die folgenden Aussagen

1. Eigenschaften bzgl. des EW-Problems

1. Anzahl der EW: Die Matrix A hat genau n reelle EW λ_i $(i=1,2,\dots,n)$, die entsprechend ihrer Vielfachheit zu zählen sind.

2. Orthogonalität der EV: Die zu verschiedenen EW $\lambda_i \neq \lambda_j$ gehörenden EV $\vec{x}_i$ und $\vec{x}_j$ sind orthogonal, d.h. es gilt

$$\vec{x}_i^{\,T}\cdot\vec{x}_j = 0$$

3. Matrix mit p-fachem EW: Zu einem p-fachen EW $\lambda=\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_p$ ex. p lin. unabh. EV $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p$.

Wegen $A\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}$ sind auch alle nichttrivialen Linearkombinationen EV zu λ.

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$

EW sind: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 2$

1) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$: aus zugehörigem homog. Gl.system $\Rightarrow A\vec{x} = \lambda\vec{x}$

3 identische Gln.

x_1 bel., x_2 bel., $x_3 = -x_1 - x_2$

man wählt $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ und $x_1 = 0, x_2 = 1$ und erhält

die beiden lin. unabh. EV

$$\vec{x}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{x}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2) $\lambda_3 = 2$: $\Rightarrow$ x_1 bel., $x_2 = x_1$, $x_3 = x_1$

wählt man z.B. $x_1 = 1$ $\Rightarrow$ erhält den EV

$$\vec{x}_3 = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrix A ist symmetrisch, die zu den verschiedenen EW gehörenden EV sind orthogonal. $\vec{x}_1^{\,T} \cdot \vec{x}_3 = 0$; $\vec{x}_2^{\,T} \cdot \vec{x}_3 = 0$

Ähnlichkeitstransformation

- Wird die quadrat. Matrix A mit Hilfe der regulären quadrat. Matrix G nach der Vorschrift

$$G^{-1} A G = \tilde{A}$$

transf., ⇒ Ähnlichkeitstransf.

quadrat. (n×n)-Matrix, deren Rang = n ist; d.h. $\det A \neq 0$

Matrizen A und $\tilde{A}$ heißen ähnlich und es gilt:

$\sim$ $\hat{U}^T \hat{U} = \hat{E}$

(*) orthogonal: Spalten + Zeilenvektoren sind ~~[illegible]~~ orthonormal

$\rightarrow U^T = U^{-1}$

1. Die Matrizen A und $\tilde{A}$ haben dieselben EW, d.h. bei einer Ähnlichkeitstransf. ändern sich die EW nicht

2. Ist A symm., dann ist auch $\tilde{A}$ symm., falls G orthogonal ist:

$$\tilde{A} = G^T A G \quad \text{mit } G^T G = E.$$

Ähnlichkeitstransf.

- bei ihr bleiben EW und Symmetrie erhalten
- in diesem Zusammenhang besagt (■), dass eine symm. Matrix A orthogonal ähnlich auf die reelle Diagonalform D transf. werden kann

- Ähnliche Matrix; UAU^{-1}; $\det \hat{U} \neq 0$

(im Speziellen $U^{-1} = U^{T}$ unitär)

Betrachte

$$\det(UAU^{-1}) = \det U \det A \det U^{-1} = \underline{\underline{\det A}}$$

Der Wert dieser Determinante ist invariant bei einer Ähnlichkeitstransformation

- charakteristische Gleichung

Es sei $\varphi(\lambda) = \det(\hat{A} - \lambda \hat{E})$

Betrachte $\det(UAU^{-1} - \lambda \hat{E}) =$

$$\det(U(A - \lambda \hat{E})U^{-1}) = \det(\hat{A} - \lambda \hat{E})$$

$\Rightarrow$ charakteristische Gleichung ist auch invariant $\rightarrow$ $\lambda_1 \dots \lambda_n$ invariant.

charakteristische Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & a_{NN}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-1)^N \lambda^N + (-1)^{N-1} \lambda^{N-1} (a_{11}+a_{22}+\dots+a_{NN}) + \dots$$

$$+ \dots + \det \hat{A} = 0$$

$\Rightarrow$ Auch die Spur der Matrix A ist invariant

$\rightsquigarrow \operatorname{Sp} \hat{A} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i$ ist invariant.

$\Leftarrow$

$\rightarrow (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)\dots(\lambda-\lambda_N) = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda-\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-\lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \lambda-\lambda_N \end{vmatrix} = \det(UAU^{-1} - \lambda \hat{E})$$

2. Hauptachsentransformation, Ähnlichkeitstransf.

zu jeder reellen symm. Matrix A → gibt es eine orthogonale Matrix U ⊛ und eine Diagonalmatrix D mit:

($U^T = U^{-1}$ oder $UU^T = U^T U = E$)

$$\boxed{A = U D U^T \quad (\blacktriangle)}$$

(komplex → unitär)

Dabei sind die Diagonalelemente von D die EW von A, und die Spalten von U sind die dazugehörigen normierten EV

- aus ($\blacktriangle$) folgt unmittelbar

$$\boxed{D = U^T A U} \rightarrow \underline{\text{Hauptachsentransf.}} \ (\blacksquare)$$

auf diese Weise wird <u>A in die Diagonalform überführt</u>

Orthogonal: Zeilen und Spaltenvektoren sind senkrecht (orthonormal)

$U^T U = \underline{E} \Rightarrow U^T = U^{-1}$ (Orth)

Transformation zur Diagonalmatrix?

$$U^{-1} A U = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ 0 & \mu_2 & \\ & & \ddots \; \mu_N \end{pmatrix} \quad ? \quad \mu_i ?$$

Multipliziere mit U von links

$$\Rightarrow A U = U \begin{pmatrix} \mu_1 & \dots & 0 \\ 0 & & \mu_N \end{pmatrix}$$

$$\sum_{s=1}^{N} a_{is} u_{sk} = u_{ik} \mu_k \qquad k = 1 \dots N$$

Fixiere k $\leadsto$ N-Gleichungen der Art:

$$\sum_{s=1}^{N} a_{is} u_{sk} = u_{ik} \mu_k \quad i = 1 \dots N$$

Darin gibt es μ_k und N-Komponenten

$$u_{1k} \; u_{2k} \; u_{3k} \dots u_{Nk}$$

Fasse den Spaltenvektor $\begin{pmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \\ \vdots \\ u_{Nk} \end{pmatrix} = \vec{u}^{(k)}$

$$(a_{11}-\mu_k)v_{1k} + a_{12}v_{2k} + \dots = 0$$

$$a_{21}\, v_{1k} + (a_{22}-\mu_k)v_{2k} + \dots = 0$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$a_{N1}\, v_{1k} + a_{N2}v_{2k} + \dots = 0$$

Hat nichttriviale Lsg $v_{ik} \neq 0$, wenn

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\mu_k & & \\ a_{21} \, .. & a_{22}-\mu_k & .. \\ .. & & \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow \mu_k$ sind Eigenwerte von $\hat{A}$!!

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \dots \neq \lambda_N$ angenommen

μ_k sind Eigenwerte von $\hat{A}$

$\mu_k = \lambda_k \quad k = 1 \dots N$

$$\Rightarrow k=1 \quad (a_{11}-\lambda_1)v_{11} + a_{12}v_{21} \dots + a_{1N}v_{N1} = 0$$

$$a_{21} \dots v_{11} + (a_{22}-\lambda_1)v_{21} + \dots = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{N1}\, v_{11} + \dots + (a_{NN}-\lambda_1)v_{N1} = 0$$

$\Rightarrow \{u_{i1}\} = \vec{u}_1$ ist Eigenvektor zum Eigenwert λ_1

$$\Rightarrow \begin{matrix} v_{11} & v_{12} & \\ v_{21} & v_{22} & \\ \vdots & \vdots & \dots\dots \\ v_{N1} & v_{N2} & \end{matrix}$$

$$\Rightarrow k=2 \quad \left. \begin{aligned} (a_{11}-\lambda_2)v_{12} + a_{12}v_{22} + \dots a_{1N}v_{N2} &= 0 \\ a_{21}v_{12} + (a_{22}-\lambda_2)v_{22} \dots &= 0 \\ \vdots \quad \vdots & \end{aligned} \right)$$

Gleichung schreibt sich als

$$\hat{A}\,\vec{u}^{(k)} = \lambda_k \vec{u}^{(k)} \qquad \vec{u}^{(k)} = \begin{pmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \\ \vdots \\ u_{Nk} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{u}^{(k)}$ ist Eigenvector zum

Eigenwert λ_k !!

$\vec{u}^{k} = \vec{e}_{\lambda_k}$ als normierter Vektor

$$\Rightarrow \hat{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1k} & \dots & u_{1N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_{N1} & u_{N2} & & u_{Nk} & & u_{NN} \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ Eigenvektor zu λ_1 — zu λ_2 ..... zu λ_N

Die Drehmatrix, welche A diagonalisiert wird aus den Eigenvektoren zu den Eigenwerten gebildet.

- If $\hat{W}_{(H,N)}$ has N non-degenerate eigenvalues the $\vec{e}_1 \dots \vec{e}_N$ are linearly independent

  $\sum c_i \vec{e}_{\lambda_i} = 0$ has solution $c_i = 0$ $i = 1..N$

  $\vec{e}_{\lambda_i}$ can be used as a basis for any vector in N-space

  $\vec{v} = \sum v_i \vec{e}_{\lambda_i}$ with coefficients

  with unique v_i.

- If $\hat{W}$ - symmetric $\rightarrow$ $\lambda \in \mathrm{Re}$.

  then $\vec{e}_{\lambda_i} \cdot \vec{e}_{\lambda_j} = \delta_{ij}$ orthonormal basis

  $v_i = \left(\vec{e}_{\lambda_i} \cdot \vec{v}\right)$

- Let $\vec{e}_i$? be orthonormal basis from a symmetric matrix

Then make:

$$\hat{E}_\lambda = \left(\vec{e}_1^{\,T}, \vec{e}_2^{\,T} \ldots \vec{e}_N^{\,T}\right) = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{N,1} \\ e_{21} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_{N1} & e_{N,2} & & e_{N,N} \end{pmatrix}$$

columns are eigenvectors

$$\Rightarrow \left[\hat{E}_\lambda^{T} \cdot \hat{E}_\lambda\right]_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \quad \curvearrowright \quad \hat{E}^{T} = \hat{E}^{-1}$$

$\Rightarrow \hat{E}_\lambda$ - orthogonal matrix

$$- \quad \underbrace{\hat{E}_\lambda^{-1}\, \hat{W} \cdot \hat{E}_\lambda}_{\text{oper.} \to \text{diagonalization}} = \hat{E}_\lambda^{T} \left(\lambda_1 \vec{e}_1, \lambda_2 \vec{e}_2 \ldots \lambda \vec{e}_N\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \lambda_N \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 e_{1,1} & \lambda_2 e_{2,1} & \lambda_N e_{N,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 e_{1,N} & \lambda_2 e_{2,N} & \end{pmatrix}$$

Inversely

$$\hat{W} = \hat{E}_\lambda \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \ddots \lambda_N \end{pmatrix} \cdot \hat{E}_\lambda^{-1}$$

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{W}^{n} = \hat{W} \cdot \hat{W} \cdots \hat{W} =$$

$$= (E \cdot L \cdot E^{-1})(E L E^{-1}) \cdots (\quad)$$

$$= \hat{E} \hat{L}^{n} E^{-1} = \hat{E} \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1^{n} \dots \lambda_N^{n}) \hat{E}^{-1}$$

$$\Rightarrow f(\hat{W}) = \text{Polynomial - Expansion}$$

$$= \hat{E}\, \mathrm{diag}\left(f(\lambda_1) \dots f(\lambda_N)\right) \cdot \hat{E}^{-1}$$

<u>Bsp.</u>: Diagonalisierung

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{symmetrisch, reell}$$

EW-Gl. bzw. charakt. Polynom:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(1-\lambda) - 16 =$$
$$= \lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16+9} = 4 \pm 5; \quad \lambda_1 = 9; \quad \lambda_2 = -1$$

EV: 1) $\lambda_1 = 9$ $\quad \cancel{(A - 9\cdot E)\vec{x}_1 = 0}$

$A\vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{x}$

$$\begin{pmatrix} 7-9 & 4 \\ 4 & 1-9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \end{pmatrix} = 0; \quad \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \end{pmatrix} = 0$$

beide Zeilen liefern dieselbe Gl. $(-2)\cdot(1) = (2)$

$-2x_{1,1} + 4x_{1,2} = 0 \Rightarrow$ wählen also eine Komponente willkürlich aus, etwa $x_{1,2} = 1 \Rightarrow x_{1,1} = 2$

$\Rightarrow$ EV: $\vec{x}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $\lambda_2 = -1$; $A\vec{x} = -\vec{x}$; $\begin{pmatrix} 7+1 & 4 \\ 4 & 1+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \end{pmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \end{pmatrix} = 0 \quad 2\cdot(2) = (1)$

Bestimmungsgl.: $8x_{2,1} + 4x_{2,2} = 0$

wird gelöst durch $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ EV: $\vec{x}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

stellen fest, $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ stehen senkrecht aufeinander

$$\vec{x}_1^T \cdot \vec{x}_2 = 0$$

Diagonalisierung: $D = U^T A U$

D: Diagonalform $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

U: Spalten von U sind die normierten EV, die zu $\lambda_{1/2}$ gehören

normierte EV: $\vec{x}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{x}_1^T \cdot \vec{x}_1 = 1$

$$c_1 (2 \ \ 1) \cdot c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1^2 (4+1) = c_1^2 \cdot 5 \stackrel{!}{=} 1; \ c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{x}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \ \vec{x}_2^T \cdot \vec{x}_2 = 1$$

$$c_{12} (1 \ -2) \cdot c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = c_2^2 (1+4) = 5 \cdot c_{12}^2 \stackrel{!}{=} 1; \ c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\Rightarrow$ orthogonale Matrix U:

$$U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Matrixprodukt: U^TAU

$$U^TAU = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18 & -1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = U^TAU = D$$

$$(D - \lambda E)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\tilde{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
