8. Gewöhnliche Differentialgln.

- viele phys. Vorgänge → math. durch Lsgn. von Diff.gln. zu beschreiben

  z.B. i) Schwingungen einer Geigensaite → Schwingungsgl.

  ii) Temp.ausgleich längs eines aufgeheizten Drahtes → Wärmeleitungsgl.

  iii) eindim. Bew. eines Elektrons in einem Potenzial q.m. durch Lsg. der Schrödingergl. $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U\right)\psi$

- tragen das Wichtigste über Vielfalt, Existenz und Konstruktion von Lsgn. von gewöhnlichen Diff.gln. zusammen

1. Einleitung

allgemein → Diff.gln. sind Gln., in denen die gesuchten Fktn. samt ihren Ableitungen vorkommen

behandeln hier:

gewöhnliche Diff.gln.: hier erscheint in der Gl. eine unbekannte Fkt. $y = f(x)$ einer reellen Veränderlichen

$x \in I \subset \mathbb{R}$ samt ihrer Ableitungen

$$\boxed{F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0}$$ implizite Form ~~explizite Form~~

als Argumente einer geg. Fkt. F

höchste auftretende Ableitung $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ Ordnung d. Diff.gl.

Bsp.: zeitliche Auslenkung $x(t)$ eines eindim. harm.

Osz. $\Rightarrow$ gewöhnl. Diff.gl. 2. Ordnung; unbekannte Fkt. ist $x = x(t)$

"$\cdot$" $= \frac{d}{dt}$ 2. Ordnung $\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{1}{m} k(t)$

oder $y''' + x y'^3 - e^y = 0$, unbekannte Fkt. ist $y = y(x)$; "$'$" $= \frac{d}{dx}$

gewöhnliche Diff 3. Ordnung

Liegt eine gewöhnl. Diff.gl. vor $\Rightarrow$ folgende Fragen tauchen auf

a) Existiert eine Lsg.?

b) Falls eine Lsg. ex., ist sie eindeutig?

c) Falls mehrere Lsgn. ex., wie sieht die Gesamtheit der Lsgn. aus? (spezielle)

Bsp.: gewöhnl. Diff.gl. 1. Ordnung

$$y'(x) = f(x) \qquad x \in \mathbb{R} \quad \text{mit einer stet. Fkt. } f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

explizite Form $\Rightarrow F$ nach y' auflösen

zu a) ja; $y(x) = \int_0^x f(\bar{x})\,d\bar{x}$ ist eine (spez.) Lsg.

zu b) nein; da jede Stammfkt. von f Lsg. ist.

zu c) allg. Lsg. ist

$$y(x) = \int f(x)\,dx = \int_0^x f(\bar{x})\,d\bar{x} + \text{const.}$$

enthält also eine bel. Konstante

zur weiteren Illustration: Punkte a) - c):

- phys. z.B. Pendel vollführt Schwingungen wenn es angestossen wird (<u>Ex. einer Lsg.</u>) auf determinierte und reproduzierbare Weise (<u>Eindeutigkeit der Lsg.</u>)

$\Rightarrow$ math. Beschreibung verlangt <u>eindeutige Lsg.</u>

$\Rightarrow$ Diffgl. muss durch Anfangsbed. ergänzt werden $\rightarrow$ als Nebenbed. $\rightarrow$ Forderungen an die unbekannte Fkt. $y(x)$ und ihre Ableitungen an ein und derselben Stelle x_0 der unabh. Variablen x

$\rightarrow$ <u>Anfangswertproblem</u>

Gewöhnliche Diff.gln. 1. Ordnung

- Existenz u. Eindeutigkeit der Lsg.

gesucht ⇒ allg. Lsg. $y(x)$ $x \in I \subset \mathbb{R}$ einer Diff.gl. der Form

$$\boxed{F(x, y, y') = 0}$$

mit vorgeg. Fkt. $F: \bar{G} \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

- nehmen an, dass sich Gl. $F = 0$ nach y' auflösen lässt

⇒ <u>explizite</u> <u>Diff.gl. 1. Ordnung</u>

$$y' = f(x, y) \quad \text{mit } f: G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

<u>Satz (Existenzsatz von Peano):</u> Vorgelegt ist die Diff.gl.

$y' = f(x,y)$ in einem rechteckigen Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$.

Ist f stetig in G, so ex. für jedes $(x_0, y_0) \in G$ (mindestens) eine Lsg. der Diff.gl., die in einer Umgebung von x_0 def. ist und die A.B. $y(x_0) = y_0$ erfüllt.

<u>Bsp.</u> für Ex. mehrer Lsgn. zu einer A.B.:

$$y' = \sqrt{y} \;; \quad y \geq 0 \text{ und } y(0) = 0 = y_0$$

eine Lsg. $y \equiv 0$

dagegen auch $y(x) = \frac{x^2}{4}$; $x \geq 0$ Lsg. zu A.B. $y(0) = 0$

$$y' = \frac{x}{2} = \sqrt{y}$$

- um Eindeutigkeit der Lsgn. zu garantieren ⇒ weitere Bed. an Fkt. f stellen ⇒ <u>Lipschitzbed.</u>

<u>Def.:</u> Eine Fkt. $f: G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ erfüllt in G die <u>Lipschitzbed.</u>, wenn eine Konstante $N > 0$ ex. mit

$$\boxed{|f(x,y_2) - f(x,y_1)| \le N\,|y_2 - y_1|}$$

für alle Punktpaare $(x,y_1), (x,y_2) \in G$.

- eine eindeutige Lsg. garantiert der

<u>Satz</u> (<u>Existenz- und Eindeutigkeitssatz</u> von Picard-Lindelöf):
Vorgelegt ist die Diff.gl. $y' = f(x,y)$ in einem rechteckigen Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$. Ist $f(x,y)$ stetig in G und erfüllt dort die Lipschitzbed., so ex. für jedes $(x_0,y_0) \in G$ <u>genau</u> eine Lsg. der Diff.gl., die in einer Umgebung von x_0 def. ist und die A.B. $y(x_0) = y_0$ erfüllt.

Resultat: für jede in G liegende A.B. $y(x_0)=y_0$ postuliert der Existenz- u. Eindeutigkeitssatz eine eindeutige Lsg. der Diff.gl. $y'=f(x,y)$

⇒ Lösungsgesamtheit enthält also eine willkürliche Konstante, nämlich diesen Anfangswert ⇒ allg. Lsg.

wählt man die Konstante so, dass eine vorgeg. A.B. erfüllt wird ⇒ spez. Lsg.

$$y'=f(x) \quad x\in\mathbb{R}$$

$$y_{allg}(x)=\int_0^x f(\bar{x})d\bar{x}+c$$; mit willkürlicher Konst. $c\in\mathbb{R}$ ⇒ allgemeine Lsg.

zu der A.B. $y(0)=y_0$ gehört die spez. Lsg.

$$y_{spez}(x)=\int_0^x f(\bar{x})d\bar{x}+y_0$$

Lösungsmethoden

Diff.gl. 1. Ordnung

$$\boxed{y'=f(x,y)}$$

-dann je nach Gestalt von f Standardverfahren zur Lösung

a) Separation (Trennung) der Variablen

- angenommen, $f(x,y) = \underbrace{g(x)\cdot h(y)}_{\text{Produkt zweier stet. Fktn.}}$

gilt $h(y) \neq 0 \Rightarrow$

$y' = g(x)\cdot h(y)$ lässt sich schreiben als

$$\frac{y'}{h(y)} = \frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x)$$

Integration von x_0 bis x liefert:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{h(y(t))}\,dt = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$

mit Variablensubst. $y(t) = s$ ergibt sich für die A.B. $y(x_0) = y_0$

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{ds}{h(s)} = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$

aus dieser Gl. folgt (zumindest prinzipiell) die Lsg.:

$$y = y(x) \text{ mit } y(x_0) = y_0$$

- in gekürzter Form:

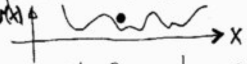
$$y' = \frac{dy}{dx} = g(x)\,h(y)$$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx \rightarrow$ Trennung der Variablen

für A.B. $y(x_0) = y_0$ liefert Integration von x_0 bis x

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{h(y)} = \int_{x_0}^{x} g(x)\,dx$$

<u>Bsp.:</u> eindim. Bew. eines Massenpunktes m im Potenzial $V(x) \Rightarrow$ Energiesatz



$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V(x) = E \quad ; \quad \text{mit Gesamtenergie } E:$$

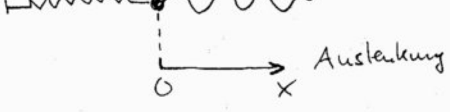
$$\boxed{\frac{m}{2} y^2 + U(x) - E = 0}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}$$

Separation der Variablen liefert für die A.B. $x(t_0) = x_0$

Lsg.:
$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\underbrace{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}}_{V(x) < E}} = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0$$

$V(x) = \frac{\kappa}{2} x^2$ (schwingender Massenpunkt an einer Feder mit Federkonst. κ)



und damit

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{\varkappa}{2}x^2\right)}} = \sqrt{\frac{m}{\varkappa}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{\varkappa} - x^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{\varkappa}} \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{2E}{\varkappa}}}\right)\Bigg|_{x_0}^{x}$$

$\Rightarrow$ für Bew. $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{2E}{\varkappa}}}\right) = \sqrt{\frac{\varkappa}{m}}\, t + \delta$ mit $\delta = \arcsin\left(\frac{x_0}{\sqrt{\frac{2E}{\varkappa}}}\right) - \sqrt{\frac{\varkappa}{m}}\, t_0$

bzw. $x(t) = \underbrace{\sqrt{\frac{2E}{\varkappa}}} \sin\left(\underbrace{\sqrt{\frac{\varkappa}{m}}}\, t + \delta\right)$ harmon. Schwingung

mit Amplitude u. Frequenz ; Phase $\delta \to$ A.B.

2. Bsp. $\to$ Rückseite

b) Exakte Diff.gl. (totales Differential) - Integrierender Faktor

Diff.gl. $\boxed{y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y)}$

$\Rightarrow$ lässt sich in Form

$$\boxed{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0}$$ schreiben, mit

$$\boxed{f(x,y) = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}}$$

- Ausdruck der Form $P dx + Q dy$ genau dann ein <u>vollständiges Differenzial $d\phi$</u>, wenn

$$\boxed{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = d\phi(x,y)}$$

$\Rightarrow$ d.h. wenn <u>Integrabilitätsbedingung</u>

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0}$$ gilt

$\Rightarrow$ dann Diffgl. exakt $d\phi = 0 \Rightarrow \phi(x,y) = \text{const.}$ allg. Lsg.

lässt sich diese Gl. nach y auflösen, $\Rightarrow$ Lsg.

$$\boxed{y = y(x)}$$

Bsp.: $\overbrace{(x^2-y^2)}^{P(x,y)}dx + \overbrace{(5-2xy)}^{Q(x,y)}dy = 0$

~~$yx\,dx + \frac{1}{2}x^2 dy = 0$~~ $\Rightarrow$ exakt, da linke Seite totales Diff. darstellt

Bedingung $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(5-2xy) = -2y$

$\Rightarrow$ Diff. ist exakt

Fkt. $\phi(x,y)$ wie folgt bestimmt:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy = P dx + Q dy$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = P = x^2 - y^2 \,; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = Q = 5 - 2xy$$

aus 1. Gl. $\Rightarrow$ $\phi(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + g(y)$

nach Differenziation dieser Gleichheit nach y und nach dem Vergleich mit $\frac{\partial\phi}{\partial y} \Rightarrow$

$$-2xy + g'(y) = -2xy + 5 \Rightarrow g(y) = 5y + k$$

somit $\phi(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + 5y + k$

<u>allg. Integral</u> der Diff.gl.:

$$\frac{1}{3}x^3 - xy^2 + 5y = C$$

↓

Lsg. als Ergebnis eines Integrationsprozesses

c) <u>Lineare gewöhnliche Diff.gln. 1. Ordnung</u>

$y' = f(x,y)$ allgemein

- gilt $f(x,y) = -g(x)y + h(x)$ ⇒ heißt die Diff.gl. <u>linear</u>:

$$\boxed{y' + g(x)y = h(x)}$$

- sind g und h stetige Fktn. ⇒ kann man die eindeutig existierende Lsg. für den Anfangswert

$y(x_0) = y_0$ explizit hinschreiben:

Multiplikation mit $e^{\int_{x_0}^{x} g(t)dt}$ liefert

$$e^{\int_{x_0}^{x} g(t)dt} y' + e^{\int_{x_0}^{x} g(t)dt} g(x) y = \frac{d}{dx}\left[e^{\int_{x_0}^{x} g(t)dt} y\right] = e^{\int_{x_0}^{x} g(t)dt} h(x)$$

woraus durch best. Integration von x_0 bis x folgt:

$$e^{\int_{x_0}^{x} g(t)dt} y(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{x'} g(t)dt} h(x')dx'$$

d. h.

$$\boxed{y(x) = \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{x} g(t)dt} h(x')dx'\right] e^{-\int_{x_0}^{x} g(t)dt}}$$

gilt $h(x) = 0$ ⇒ Diff.gl. heißt <u>homogen</u>

andernfalls <u>inhomogen</u>

- setzen in obiger Lsg. $h \equiv 0 \Rightarrow$ Lsg. der zugehörigen homog. Diff-gl.

$$\boxed{\begin{array}{l} y' + g(x)y = 0 \;;\; y(x_0) = y_0 \\ y(x) = y_0\, e^{-\int_{x_0}^{x} g(t)dt} \end{array}}$$

— Integrierender Faktor

<u>Bsp.:</u> Zerfallen radioaktive Atomkerne mit der Zerfalls-konstanten $\lambda \Rightarrow$ Zahl N der Kerne nimmt mit der Zeit t wie folgt ab

$$dN = -\lambda N dt$$

$\Rightarrow$ hom. lin. Diff.gl. 1. Ordnung

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

Lsg.: $N(t) = N(0)\, e^{-\int_0^t \lambda dt} = N(0) e^{-\lambda t}$

nach Halbwertzeit $T = \frac{1}{\lambda}\ln 2 \Rightarrow$ Hälfte der Substanz zerfallen

---

$$m\dot{v} = -\gamma v + F$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\gamma}{m} v = \frac{F}{m} \qquad g(x) = \frac{\gamma}{m}$$

$$h(x) = \frac{F}{m}$$

Diff.gln. höherer Ordnung und Systeme von Diff.gln.

Zurückführung auf ein System von Diff.gln.

- jede Diff.gl. n-ter Ordnung

$$\boxed{y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})}$$

kann durch Einführung der neuen Variablen

$$y_1 = y',\ y_2 = y'', \ldots, y_{n-1} = y^{(n-1)}$$

auf ein System von n Diff.gln. 1. Ordnung

$$\boxed{y_1 = y',\ \frac{dy_1}{dx} = y_2, \ldots, \frac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1})}$$

zurückgeführt werden

<u>Bsp.:</u> harmonischer Osz.

$$x''(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

$$x'(t) = y;\quad y'(t) = -\omega_0^2 x(t)$$

Lineare Diff.gln. n-ter Ordnung

Diff.gl. der Form

$$\boxed{y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(x)}$$

heißt lin. Diff.gl. n-ter Ordnung

Zweiter Ordnung:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

$p(x)$; $q(x)$ stetig $\rightsquigarrow$ eine Lösung für Anfangswerte: $y(x_0) = y_0$ $\quad y'(x=x_0) = y_0'$

Bezeichne $P(y) = y'' + p(x)y + q(x)y = 0$

Es gilt $\quad P(cy) = cP(y)$

$$P(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1P(y_1) + c_2P(y_2)$$

- Ist y_1 Lösung $\rightsquigarrow P(y_1) = 0 \rightsquigarrow P(cy_1) = 0$

$\Rightarrow y = c_1y_1$ ist Lsg

- Sind y_1 und y_2 Lösung so ist auch

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

Lösung. Analog für n-te Ordnung.

Wichtig ist – lineare Unabhängigkeit!!

– y_1 und y_2 heißen linear unabhängig wenn $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0$ nur $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ als Lösung besitzt.

$\leadsto \frac{y_2}{y_1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ ist nicht konstant.

– Dann ist

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} \neq 0$$

– Bezeichne

$$\Delta(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W$$

Wronski-Determinante.

Für Δ gilt

$$\Delta(y_1, y_2) = \Delta_0 \, e^{-\int_{x_0}^{x} p(x')\,dx'}$$

Beweis

$$\frac{d}{dx}\Delta = y_1 y_2' + y_1 y_2'' - y_1' y_2' - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$$

Für y_1: $y_1'' + p(x)\, y_1' + q(x)\, y_1 = 0 \quad | \cdot -y_2$

+) y_2: $y_2'' + p(x)\, y_2' + q(x)\, y_2 = 0 \quad | \cdot y_1$

$$\underbrace{y_1 y_2'' - y_2 y_1''} + p(x)\left(y_1 y_2' - y_1' y_2\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\Delta + p(x)\,\Delta = 0}$$

Entweder Δ verschwindet (if $\Delta_0 = 0$)

oder $\Delta \neq 0$ für $|x| < \infty$; p ist stetig

- dabei sind $g = g(x)$ und $a_i = a_i(x)$
- wenn $a_1, a_2, \ldots, a_n$ konstant $\Rightarrow$ Diff.gl. mit konst. Koeffizienten
- <u>homogene</u> Gl. für $g = 0$
  <u>inhomog.</u> Gl. für $g \neq 0$

<u>Fundamentalsystem von Lsgn.</u>

Ein System von n Lsgn. $y_1^L, y_2^L, \ldots, y_n^L$ einer homog. lin. Diff.gl. wird <u>Fundamentalsystem</u> genannt, falls diese Fktn. lin. unabh. sind.

- Lsgn. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ einer lin. homog. Diff.gl. bilden genau dann ein Fundamentalsystem, wenn ihre <u>Wronski-Det.</u>

$$W = \begin{vmatrix} y_1^L & y_2^L & \cdots & y_n^L \\ y_1^{L\prime} & y_2^{L\prime} & \cdots & y_n^{L\prime} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$ von Null verschieden ist.

<u>Anmerkung:</u> Sind die Koeffizienten $a_i(x)$ stetig, $y_1^L(x), y_2^L(x), \ldots, y_n^L(x)$ ~~bel.~~ Lsgn. dieser Gl. und x_0 ein bel. Punkt, so gilt die Gleichheit

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(x)dx}$$

<u>Liouvillsche Formel</u>

d.h., da für bel. endliches z stets $e^z > 0$ ist, ist $W(x)$ im gesamten x-Bereich gleich Null oder nicht, je nachdem, ob $W(x_0)=0$ oder $W(x_0)\neq 0$ ist

$\Rightarrow$ die Wronski-Det. kann identisch verschwinden

$\Rightarrow$ Die n Lsgn. $y_1^L, y_2^L, \ldots, y_n^L$ der hom. lin. Diff.gl. sind genau dann <u>lin. abhängig</u>, wenn nur an einer einzigen Stelle x_0 des betrachteten Intervalls $W(x_0)=0$ gilt

- Wenn dagegen die Lsgn. $y_1^L, y_2^L, \ldots, y_n^L$ ein Fundamentalsystem bilden, dann lautet die <u>allg. Lsg. der lin. hom. Diffgl.</u>

$$\boxed{y = C_1 y_1^L + C_2 y_2^L + \ldots + C_n y_n^L, \text{ wobei } C_i \text{ bel. Konstanten}}$$

<u>Bsp.:</u> Fktn.

$$y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x$$

sind im Intervall $(-\infty, +\infty)$ Lsgn. d. homog. Diffgl. 2. Ordnung

$$y'' + y = 0$$

$\Rightarrow$ Fundamentalsystem; da

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

$\Rightarrow$ somit y_1 und y_2 im Intervall $(-\infty, +\infty)$ lin. unabh.

$\rightarrow$ allg. Integral der betrachteten Gl.

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$\boxed{\begin{gathered} = C_1' e^{ix} + C_2' e^{-xi} \\ C_1 = C_2^* \end{gathered}}$$

Bemerkung: phys. Probleme → Frage: geg. Diffgl.

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

gesucht → solche Lsg. $y(x)$ dieser Gl., die im geg. Punkt x_0 die A.B.

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

erfüllt

⇒ wenn allg. Integral bekannt, ⇒ Konstanten $c_1, c_2, \dots, c_n$ durch A.B. bestimmt

Bsp.: Lsg. von $y'' + y = 0$ mit A.B. $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$

allg. Integral: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

setzt man $x = 0$ in Integral und in die Ableitung

$$y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x \Rightarrow \text{System:}$$

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 1\,, \quad -c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = -2$$

$$\Rightarrow c_1 = 1\,;\ c_2 = -2$$

gesuchte Lsg.: $y = \cos x - 2 \sin x$

Bemerkung: Bestimmung eines Fundamentalsystems von Lsgn. einer Diffgl. ist im Allg. sehr kompliziert. Nur wenn die Koeffizienten $a_1, a_2, \dots, a_n$ Konstanten sind, wird das Problem wesentlich vereinfacht.

- Eigenwerte und Fundamentalsystem

$\mathring{x}(t) = v(t)$ Anwendung ... $a_0 = \text{const.}$

$\mathring{v}(t) = -\frac{r}{m} v(t) - \frac{k}{m} x(t)$

Ansatz $x(t) \sim e^{-\lambda t}$ $v(t) \sim e^{-\lambda t}$

$? = \lambda$ $A = ?$

Schreibe als Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & , -1 \\ +\frac{k}{m} & , \frac{d}{dt} + \frac{r}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = 0$$

Einsetzen

$$\sim \begin{pmatrix} -\lambda & , -1 \\ +\frac{k}{m} & , -\lambda + \frac{r}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda\left(\lambda - \frac{r}{m}\right) + \frac{k}{m} = 0$$

Nicht triviale Lsg wenn

$$\lambda\left(\lambda - \frac{r}{m}\right) + \frac{k}{m} = 0$$

$$\rightsquigarrow \lambda_{1,2} = \frac{r}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

$$x(t) = A_1 e^{-\lambda_1 t} + A_2 e^{-\lambda_2 t}$$

$$\cancel{v(t) = B_1 e^{-\lambda_1 t} + B_2 e^{-\lambda_2 t}}$$

$$x(0) = A_1 + A_2 \qquad B_1 = -\lambda_1 A_1 \,;\; B_2 = -\lambda_2 A_2$$

$$\frac{d}{dt} x(t)\Big|_{t=0} = -\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = \cancel{B_1 + B_2} = v(0)$$

$$\Rightarrow A_1 + A_2 = x_0 \,;\; -\lambda_1 A_1 - \lambda_2 A_2 = 0 \rightsquigarrow$$

$$A_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} A_2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(x_0 - A_1)$$

$$A_1\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_0 \qquad A_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} x_0$$

$$\begin{vmatrix} e^{-\lambda_1 t} & e^{-\lambda_2 t} \\ -\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} & -\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \end{vmatrix} = -e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}(\lambda_2-\lambda_1) \neq 0$$

Auch möglich:

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$x \sim A e^{-\lambda t}$$

$$\underbrace{\left(+\lambda^2 + \frac{r}{m}(-\lambda) + \frac{k}{m}\right)}_{0} A e^{-\lambda t} = 0$$

$$\lambda_{1} = \frac{r}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

$$x_1 \sim e^{-\lambda_1 t} \qquad x_2 = e^{-\lambda_2 t}$$

$$\rightsquigarrow \quad x(t) = C_1 x_1 + C_2 x_2$$

$$A_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\, x_0 = \frac{\frac{\gamma}{2m} - \sqrt{\;\;}}{2\sqrt{\;\;}}\, x_0$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{4m\sqrt{\;\;}}\right) x_0$$

$$A_2 = x_0 - A_1 = x_0\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{4m\sqrt{\;\;}}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{4m\sqrt{\;\;}}\right) x_0$$

$$x(t) = \frac{x_0}{2}\left(e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t}\right) + \frac{x_0}{2}\left\{\frac{\gamma}{4m\sqrt{\;\;}}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right)\right.$$

$$= x_0\, e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\left[\cosh\left(\sqrt{\;\;}\, t\right) + \frac{\gamma}{4m\sqrt{\;\;}} \sinh\left(\sqrt{\;\;}\right)\right]$$

homogen:

$$y' + p(x)y = 0$$

$$\leadsto \leadsto y_1 = e^{-\int_{x_0}^{x} p(x')dx'} \cdot C \qquad C = y_0$$

Inhomogen:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

$$y = y_p + c_1 y_1 \qquad y_p = a_1 y_1 \quad a_1(x)$$

$$y' = y_p' + c_1 y_1' \qquad y_p' = a_1'(x) y_1 + a_1(x) y_1'$$

$$= a_1'(x) y_1 + a_1(x) y_1' + c_1 y_1' = -p(x) y_p - p(x) c_1 y_1 + q(x)$$

$$y(x) = C(x)\, e^{-\int^{x} p(x')dx'}$$

$$y'(x) = C'(x)\, e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx'} - \underbrace{C(x)\, e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}}_{y(x)} p(x)$$

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$$

$$C'(x)\, e^{-\int^{x} p(x)dx} = q(x)$$

$$C'(x) = \frac{1}{e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}}\, q(x) \quad \leadsto \quad C(x) = C_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{1}{e^{-\int_{x_0}^{x'} p(x'')dx''}}\, q(x')dx'$$

Inhomogene Diff.gln.

<u>Satz 1:</u> Ist ein Fundamentalsystem von Lsgn. $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ der Diff.gl.

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0, \quad (\square)$$

bekannt, so hat das <u>allg. Int. der inhom. Diff.gl.</u>

$$- \,\|\, - \qquad = g(x), \quad (*)$$

die Form

$$y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$$

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ - bel. Konstanten, $y_p(x)$ ist eine bel. Lsg. der Gl. $(*)$

<u>Satz 2:</u> Die Fkt. $y_p(x)$ kann durch <u>Quadraturen</u> bestimmt werden, wenn man sie in der Form

$$y_p(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x) + \ldots + c_n(x)\, y_n(x) \quad (\blacktriangle)$$

sucht, wobei $y_1(x), \ldots, y_n(x) \to$ Fundamentalsystem d. homog. Gl. bilden.

<u>Anmerkung:</u> Die Fkt. $y_p(x)$ hat die Gestalt des allg. Integrals der Gleichung $(\square)$, wo an Stelle der Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ die Fktn. der unabh. Variablen x auftreten. Diese Fktn. sollen so gewählt ~~werden~~, dass die durch den Ausdruck $(\blacktriangle)$ geg. Lsg. $y_p(x)$ die inhom. Diff.gl. erfüllt.

$\Rightarrow$ Methode der Variation der Konstanten

Satz: Wenn die Fktn. $c_1(x), c_2(x), \ldots, c_n(x)$ das Gl.system

$$\begin{aligned} c_1' y_1 + c_2' y_2 + \ldots + c_n' y_n &= 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + \ldots + c_n' y_n' &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + c_n' y_n^{(n-1)} &= g(x) \end{aligned} \qquad (\bullet)$$

erfüllen, dann erfüllt die durch den Ausdruck

$$y_p(x) = c_1(x) y_1(x) + \ldots + c_n(x) y_n(x)$$

bestimmte Fkt. $y_p(x)$ die Diff.gl. $(*)$.

Anmerkung: Aus dem System $(\bullet)$ können $c_1'(x), c_2'(x), \ldots, c_n'(x)$ bestimmt werden, da die Determinante dieses Systems Wronskische Det. des Fundamentalsystems der Lsgn. ist. Man erhält die gesuchten Fktn. $c_1(x), c_2(x), \ldots, c_n(x)$ indem man die Fktn. $c_1'(x), c_2'(x), \ldots, c_n'(x)$ integriert.

Bsp.: Man bestimme das allg. Integral der Diff.gl.

$$y'' + y = x^2$$

Fktn. $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x \Rightarrow$ Fundamentalsystem von Lsgn. der Diff.gl. $y'' + y = 0$

allg. Integral lautet dann:

$$y = y_p + c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

wobei die Fkt. y_p in der Form $y_p(x) = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$ nach der Methode der Variation der Konstanten gesucht wird

$\Rightarrow$ System (●) hat die Gestalt

$$c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0 \ , \ -c_1' \sin x + c_2' \cos x = x^2$$

$\Rightarrow$ $c_1' = -x^2 \sin x$, $\quad c_2' = x^2 \cos x$

und somit ist

$$c_1(x) = (x^2-2)\cos x - 2x \sin x, \quad c_2(x) = (x^2-2)\sin x + 2x\cos x$$

(am besten differenzieren)

$\Rightarrow$ Einsetzen: $y_p(x) = (x^2-2)\cos^2 x - 2x \sin x \cos x + (x^2-2)\sin^2 x + 2x \cos x \sin x = x^2 - 2$

$\Rightarrow$ allg. Integral:

$$y = x^2 - 2 + c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

$c_1' = -x^2 \sin x \quad c_2' = x^2 \cos x$

Bemerkung: rechte Seite g hat oft eine spezielle Gestalt

- falls die Koeffizienten a_i konstant sind, kann für spezielle Formen der rechten Seite die Fkt. $y_p(x) \rightarrow$ auf wesentlich einfachere Art zu gewinnen

- betrachte lin. Diff.gl.

$$\underbrace{y^{(n)} + a_{n-1}}_{\text{konstant}} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

eine Lsg. hat die Form $y = e^{\alpha x}$ $\Rightarrow$ Einsetzen $\Rightarrow$ charakt. gl.

$$\alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \ldots + a_1 \alpha + a_0 = 0$$

1. Sind alle Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ der charakt. gl. voneinander verschieden, so wird ein Fundamentalsystem von Lsgn. der Diff.gl. durch die Fktn.

$$y_1 = e^{\alpha_1 x}, \; y_2 = e^{\alpha_2 x}, \ldots, \; y_n = e^{\alpha_n x}$$

gebildet

2. Ist eine bestimmte Wurzel α_i r-fach, so müssen ihr im Fundamentalsystem der Lsgn. r Fktn. entsprechen. Diese Fktn. sind

$$y_1 = e^{\alpha_i x}, \; y_2 = e^{\alpha_i x}, \ldots, \; y_r = x^{r-1} e^{\alpha_i x}$$

Bsp.: $y''' - 3y' + 2y = 0$

- charakt. Gl.: $\alpha^3 - 3\alpha + 2 = 0$
- Wurzeln: $\alpha = 1$; nach Division durch $\alpha - 1 \Rightarrow$

$$\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$$

Wurzeln: $\alpha = 1$ und $\alpha = -2$

einfache Wurzel $\alpha_1 = -2$; zweifache Wurzel $\alpha_2 = 1$

- dem Wert α_1 entspricht die Fkt. $y_1 = e^{-2x}$

dem Wert α_2 zwei Fktn. $(r = 2)$ $y_2 = e^x$ und $y_3 = x e^x$

- Fundamentalsystem der Lösungen $\Rightarrow$

$$y_1 = e^{-2x}, \quad y_2 = e^x, \quad y_3 = x e^x$$

24.2.- 16^{00}