HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR PHYSIK

Statistische Physik, WS 2014/15

Vorlesung: Prof. Dr. L. Schimansky-Geier
Übungen: B. Sonnenschein, Dr. A. Straube
URL: http://people.physik.hu-berlin.de/~straube (→ Teaching → WS 2014/15: StatPhys)

Übungsblatt 5: Phasenraum und Entropie

Ausgabe: 07.11.2014 Abgabe: bis zum Fr, 14.11. (Schubfach vor Raum NEW 15, 3'411)

---

1. Aufgabe (5 Punkte) Satz von Liouville

Zeigen Sie, dass das Phasenraumvolumen $V = \int \mathrm{d}V$ mit $dV = dq_1 \dots dq_N \, dp_1 \dots dp_N$ eine kanonische Invariante ist. Hinweis: Unter Berücksichtigung von den kanonischen Bewegungsgleichungen, $\dot{q}_i = \partial H/\partial p_i$ und $\dot{p}_i = -\partial H/\partial q_i$, betrachten Sie die Transformation $dV(t+\Delta t) = \det \mathcal{J} \, dV(t)$ und zeigen Sie, dass für die Funktionaldeterminante gilt $\det \mathcal{J} = 1$.

2. Aufgabe (5 Punkte) Entropie einer Wahrscheinlichkeitsverteilung

Betrachten Sie ein Gesamtsystem, welches aus N gleichartigen Teilsystemen besteht. Diese können sich in den n Energiezuständen E_i mit $i = 1, \dots, n$ befinden.

(a) Nehmen Sie an, dass das System sich in einem "Makrozustand" befindet, in dem jeweils M_i Teilsysteme im Energiezustand E_i sind. Begründen Sie die Anzahl Ω der zugehörigen "Mikrozustände",

$$\Omega = \frac{N!}{M_1! M_2! \dots M_n!} \, .$$

(b) Nehmen Sie nun an, dass jede Anordnung von M_i gleichwahrscheinlich ist. Zeigen Sie, dass die maximale Anzahl Ω dann der maximalen statistischen Entropie einer Wahrscheinlichkeitsverteilung,

$$S\{p_i\} = -k_B \langle \ln p_i \rangle = -k_B \sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i \, ,$$

entspricht. Hinweis: Benutzen Sie die Stirlingsche Formel, $\ln N! \approx N \ln N$ (für großes N). Dabei ist $p_i = M_i/N$ als Häufigkeit der einzelnen Zuständen zu interpretieren.

3. Aufgabe (5 Punkte) Entropie eines idealen Gases

(a) Berechnen Sie das Volumen $V_M(R) = C_M R^M$ einer M-dimensionalen Kugel mit dem Radius R.

(b) Wenden Sie dieses Ergebnis, um die Anzahl von Zuständen Ω und dann die Entropie $S = k_B \ln \Omega$ eines idealen Gases zu berechnen. Stellt der Ausdruck für S eine extensive Größe dar? Hinweis: Das ideale Gas ist als ein System aus $N \gg 1$ klassischen, nichtwechselwirkenden, ununterscheidbaren Teilchen mit der Hamilton-Funktion $H = (1/2m) \sum_{i=1}^{N} (p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2)$ zu betrachten. Benutzen Sie die Stirlingsche Formel, $n! \approx n^n \mathrm{e}^{-n}$, um den Ausdruck für Ω zu vereinfachen.