HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR PHYSIK

Statistische Physik, WS 2014/15

Vorlesung: Prof. Dr. L. Schimansky-Geier
Übungen: B. Sonnenschein, Dr. A. Straube
URL: http://people.physik.hu-berlin.de/~straube (→ Teaching → WS 2014/15: StatPhys)

Übungsblatt 15: Gas mit Wechselwirkung

Ausgabe: 30.01.2015 Abgabe: bis Fr 06.02.2015 (Schubfach vor Raum NEW 15, 3'411)

---

1. Aufgabe (6 Punkte) Eindimensionales Tonks-Gas

Betrachten Sie ein eindimensionales Gas von N ununterscheidbaren "Hartkugel"-Teilchen (mit der Masse m und dem Durchmesser b) im Interval $0 \leq x \leq L$, die miteinander durch das Potential u und mit den Wänden durch Potential v wechselwirken:

$$u(x) = \begin{cases} \infty, & |x - x'| < b \\ 0, & |x - x'| \geq b\,, \end{cases} \qquad v(x) = \begin{cases} \infty, & x < b/2 \\ 0, & b/2 \leq x \geq L - b/2 \\ \infty, & x > L - b/2\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für das kanonische Zustandsintegral Z und für die Zustandsgleichung

$$Z(T, V, N) = \frac{(L - Na)^N}{\lambda^N N!}\,, \qquad P = \frac{\rho\, k_B T}{1 - \rho b}$$

gilt. Hier sind λ die thermische Wellenlänge und $\rho = N/L$ eindimensionale Teilchendichte.

2. Aufgabe (8 Punkte) Der zweite Virialkoeffizient und Zustandsgleichung

Mit Hilfe der Virialentwicklung kann die Zustandsgleichung eines idealen Gases verbessert werden ($\rho = N/V$ ist die Teilchendichte):

$$\frac{P}{k_B T} = \rho + \rho^2 B_2(T) + \ldots\,, \qquad B_2(T) = \frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}\mathbf{r}\,\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta u(\mathbf{r})}\right)\,.$$

(a) Berechnen Sie den zweiten Virialkoeffizienten $B_2(T)$ für die folgenden intermolekularen Wechselwirkungspotentiale:

$$u_1(r) = \begin{cases} \infty, & r \leq \sigma \\ 0, & r > \sigma\,, \end{cases} \qquad u_2(r) = \begin{cases} \infty, & r \leq \sigma_1 \\ -\epsilon, & \sigma_1 < r < \sigma_2 \\ 0, & r \geq \sigma_2\,. \end{cases}$$

(b) Betrachten Sie ein Gas aus N Teilchen im Volumen V, die durch Potential $u_1(r)$ wechselwirken (harte Kugeln, kurzreichweitige Abstoßung) und rechnen Sie die entsprechende kanonische Zustandssumme $Z_0(T, V, N)$ aus. Um auch die langreichweitige anziehenden Wechselwirkungen näherungsweise zu berücksichtigen, nehmen Sie danach an, dass die freie Energie als

$$F(T, V, N) \approx F_0(T, V, N) - \frac{aN^2}{V}\,, \qquad F_0(T, V, N) = -\frac{1}{\beta}\ln Z_0(T, V, N)$$

geschrieben werden kann. Bestimmen Sie daraus die innere Energie und den Druck und zeigen Sie, dass für $\rho b \ll 1$ die van der Waals Zustandsgleichung folgt.

Hinweis: Das Konfigurationsintegral für N harte Kugeln lautet $Q_N = (V - Nb)^N$, wobei $b = (2\pi/3)\sigma^3$ das ausgeschlossene Volumen pro Teilchen ist (für Punktteilchen $Q_N = V^N$).