

# Stochastische Prozesse

Vorrechnen in Übung am 17.12.2012

1. Übungszettel

10. Dezember, 2012

1) **Mastergleichung:** Formuliere ausgehend von der Chapman-Kolmogorov-Gleichung die Mastergleichung für einen Zweizustandsprozess  $I(t) = \{\Delta, \Delta'\}$  und Übergangsraten  $k_\Delta, k_{\Delta'}$ . Finde die zeitabhängige Lösung und Ausdrücke für die zeitabhängigen ersten beiden Momente.

2) **Momente:** Leite Beziehungen für die ersten beiden Momente der Teilchenzahlen eines Geburts- und Sterbeprozesses mit Übergangswahrscheinlichkeiten  $W_N^+$  und  $W_N^-$  ab.

3) **Momente:** Diskutiere den Fall von konstanten  $W_N^+ = k$  und linearer Degradation  $W_N^- = \gamma N$  und löse die zeitabhängigen Differentialgleichungen mit geeigneten Anfangsbedingungen.

4) **Kullback-Entropie:** Zeige, dass

$$K\{P, P_0\} = \sum_N P(N, t) \ln \frac{P(N, t)}{P_0(N)} \quad (1)$$

für Geburts- und Sterbeprozesse eine Lyapunov-Funktion ist.  $P(N, t)$  ist die zeitabhängige Verteilungsfunktion und  $P_0(N)$  ihre asymptotische Verteilung, für  $t \rightarrow \infty$ . Für Lyapunov-funktionen gilt:

$$K(P, P_0) \geq 0, \quad \text{und} \quad \frac{dK}{dt} \leq 0. \quad (2)$$

Das Gleichheitszeichen gilt, falls  $P(N, t) = P_0$  ist.