

Stochastische Prozesse

Vorrechnen in Übung am 21.01.2013

Achtung: am 21.01 in Raum 0'07 im IRIS Gebäude

4. Übungszettel

14. Januar, 2013

1) **Übergang zur Schrödinger-Gleichung:** Betrachte die eindimensionale überdämpfte Bewegung eines Teilchens in einem Potential $U(x)$, die durch die Langevin-Gleichung

$$\gamma \dot{x} = -\frac{\partial U(x)}{\partial x} + \sqrt{2\epsilon} \xi(t) \quad (\epsilon = \gamma k_B T)$$

mit $\langle \xi(t) \rangle = 0$, $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t - t')$ beschrieben wird. Transformiere die entsprechende Smoluchowski-Gleichung für $P(x, t)$ in eine Schrödinger-Gleichung für $\rho(x, t)$ mit

$$P(x, t) = \rho(x, t) \exp\left(-\frac{U(x)\gamma}{2\epsilon}\right).$$

2) **Multiplikatives Rauschen-I:** Betrachte die Gleichung

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\xi(t)$$

mit $\langle \xi(t) \rangle = 0$, $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t - t')$ und transformiere sie auf ein Problem mit additivem Rauschen. Zeige, dass das Stratonovich-Kalkül der Lösung entspricht.

3) **Multiplikatives Rauschen-II:** Betrachte wieder die Gleichung

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\xi(t),$$

mit $\langle \xi(t) \rangle = 0$, $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t - t')$. Formuliere die Smoluchowski-Gleichung und finde ihre stationäre Lösung mit verschwindendem Fluss, $j = 0$. Diskutiere Extrema und vergleiche mit den Mittelwerten.

4) **Integral:** Ermittle die Funktion

$$\psi(x) = \int^x \frac{f(x)}{g^2(x)} dx$$

für $f(x) = \sin x$ und $g(x) = [1 - \alpha \cos(x - \phi)]^{-1/2}$, wobei α und ϕ konstant sind. Bestimme die Integrationskonstante aus der Forderung $\psi(0) = 0$.