



Stochastische Prozesse, WS 2013/14

Vorlesung: Prof. Dr. L. Schimansky-Geier

Übungen: Dr. A. Straube

URL: <http://people.physik.hu-berlin.de/~straube> (→ Teaching → WS 2013/14 StochProz)

Übungsblatt 1: Mastergleichung, erste Momente

Ausgabe: 16.12.2013

Vorrechnen in Übung am 06.01.2014

1. Aufgabe: Mastergleichung

Formuliere ausgehend von der Chapman-Kolmogorov-Gleichung die Mastergleichung für einen Zweizustandsprozess $I(t) = \{\Delta, \Delta'\}$ und Übergangsraten $k_{\Delta}, k_{\Delta'}$. Finde die zeitabhängige Lösung und Ausdrücke für die zeitabhängigen ersten beiden Momente.

2. Aufgabe: Momente

Leite Beziehungen für die ersten beiden Momente der Teilchenzahlen eines Geburts- und Sterbeprozesses mit Übergangswahrscheinlichkeiten W_N^+ und W_N^- ab.

3. Aufgabe: Momente. Lineare Degradation

Diskutiere den Fall von konstanten $W_N^+ = k$ und linearer Degradation $W_N^- = \gamma N$ und löse die zeitabhängigen Differentialgleichungen mit geeigneten Anfangsbedingungen.

4. Aufgabe: Kullback-Entropie

Zeige, dass

$$K\{P, P_0\} = \sum_N P(N, t) \ln \frac{P(N, t)}{P_0(N)}$$

für Geburts- und Sterbeprozesse eine Lyapunov-Funktion ist. $P(N, t)$ ist die zeitabhängige Verteilungsfunktion und $P_0(N)$ ihre asymptotische Verteilung, für $t \rightarrow \infty$. Für Lyapunov-funktionen gilt:

$$K(P, P_0) \geq 0, \quad \text{und} \quad \frac{dK}{dt} \leq 0.$$

Das Gleichheitszeichen gilt, falls $P(N, t) = P_0$ ist.