HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR PHYSIK

Stochastische Prozesse, WS 2013/14

Vorlesung: Prof. Dr. L. Schimansky-Geier
Übungen: Dr. A. Straube
URL: http://people.physik.hu-berlin.de/~straube (→ Teaching → WS 2013/14 StochProz)

Übungsblatt 5: Mittlere Austrittszeit (Mean first passage time)

Ausgabe: 27.01.2014 Vorrechnen in Übung am 03.02.2014

---

1. Aufgabe: Rückwärts-Fokker-Planck-Gleichung & Mittlere Austrittszeit

Analog zur Herleitung der Vorwärts-Fokker-Planck-Gleichung leiten Sie die Rückwärts-Fokker-Planck-Gleichung

$$\partial_{t'} P(x,t|x',t') = -A(x')\partial_{x'} P(x,t|x',t') - B(x')\partial^2_{x'} P(x,t|x',t')$$

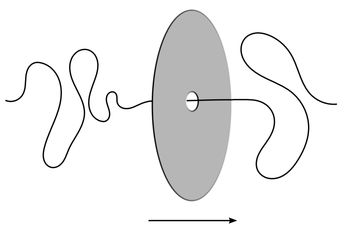
ab, wobei A und B die Drift- und Diffusionskoeffizienten sind. Führen Sie dann die Funktion $G(x,t) = \int_a^b P(x',0|x,-t)$ ein, welche die Wahrscheinlichkeit angibt ausgehend vom Punkt $a < x < b$ am $t = 0$ zur Zeit t in diesem Interval zu bleiben. Nutzen Sie dabei die Zeittranslationsinvarianz, $P(x',t|x,0) = P(x',0|x,-t)$. Zeigen Sie, dass die mittlere Zeit (Austrittszeit) $T(x) = \langle T \rangle = \int_0^\infty dt\, G(x,t)$ das Interval $a < x < b$ zu verlassen, der Gleichung

$$A(x)T'(x) + B(x)T''(x) = -1 \tag{1}$$

genügt.

2. Aufgabe: Translokation von DNA [(c) U. Gerland, A. Zielinski, LMU München]

Betrachten Sie die Translokation eines DNA-Moleküls durch eine Nanopore. Die Länge des DNA-Stranges sei L, und die Variable $x \in [0,L]$ beschreibt den Teil des Stranges, der bereits durch das Loch hindurchgegangen ist. Ein elektrisches Feld wird angelegt, das den Strang zieht. Bestimmen Sie die mittlere Zeit T bis die DNA vollständig auf der anderen Seite der Pore ist (die mittlere Zeit für x den Wert L erst zu erreichen).



Näherungsweise kann das Problem mit konstanten Drift- und Diffusionskoeffizienten, $A(x) = v$ und $B(x) = D$, beschrieben werden. Nehmen Sie an, dass die linke (rechte) Grenze reflektierend (absorbierend) ist, $T'(0) = 0$, $T(L) = 0$, und $x = x_0 \in [0,L]$ am $t = 0$.

Hinweis: Für die Randbedingungen, $T'(a) = 0$ und $T(b) = 0$, hat Gleichung 1 die Lösung

$$T(x) = \int_x^b \frac{dx'}{\psi(x')} \int_a^{x'} \frac{\psi(x'')\,dx''}{B(x'')} \quad \text{mit} \quad \psi(x) = \exp\left(\int_a^x \frac{A(x')}{B(x')} dx'\right). \tag{2}$$

[bitte wenden]

3. Aufgabe: Kleine Diffusion bzw. Rauschintensität

a) Betrachten Sie den Fall einer kleinen Diffusion, $B(x) = D$. Zeigen Sie, dass Gleichung (2) näherungsweise durch den Ausdruck

$$T(x) \approx \int_x^b \frac{dy}{A(y)} + D \int_x^b \frac{A'(y)}{A^3(y)} dy$$

ersetzt werden kann.

Hinweis: Arbeiten Sie direkt mit Gleichung (1) und suchen Sie die Lösung in Form einer Störungstheorie, $T(x) \approx T_0(x) + D\, T_1(x)$, wobei D ein kleiner Parameter ist.

b) Kann dieser Formalismus für anziehende Wechselwirkungen, z.B. mit Potential $U(r) = -C/r^3$, $C > 0$, verwendet werden? Wie würde die Kollapszeit (die Zeit bis zwei Teilchen in Kontakt kommen) von der Diffusion beinflusst werden im Vergleich zu dem rein deterministischen Fall, $D = 0$?