Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
Dr. T. Klose, D. Müller, H. Münkler, Prof. Dr. J. Plefka

Fortgeschrittene Quantentheorie WS 2013/14

Übungsblatt 1, Abgabe am Fr. 25.10.13 vor der Vorlesung,
Besprechung in den Übungen am Mo. 28.10.13 bzw. Mi. 30.10.13.

1 Kontinuitätsgleichung für Teilchen im elektromagnetischen Feld

Der Hamilton-Operator eines Teilchens im elektromagnetischen Feld lautet

$$\hat{H} = \tfrac{1}{2m}\left(\hat{\vec{p}} - \tfrac{e}{c}\,\vec{A}(\hat{x},t)\right)^2 + e\,\phi(\hat{x},t)\,.$$

Beweisen Sie die Kontinuitätsgleichung der Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho := \psi^*\psi$,

$$\frac{d}{dt}\,\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{\jmath} = 0\,,$$

wobei $\vec{\jmath} := \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*\vec{\nabla}\psi - (\vec{\nabla}\psi^*)\psi - \frac{2ie}{\hbar c}\,\vec{A}(\vec{x},t)\,\rho\right] = \frac{1}{2m}\left[\psi^*\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{x},t)\right)\psi + c.c.\right]$.

2 Quantenmechanische Dynamik

Für einen Operator $\hat{A}$ ist die Varianz definiert als $\Delta\hat{A}^2 := \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2$.

a) Der Hamilton-Operator des eindimensionalen harmonischen Oszillators lautet:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}.$$

Beweisen Sie die Identität:

$$\Delta\hat{x}^2(t) = \Delta\hat{x}^2(0)\cos^2\omega t + \left(\frac{1}{2}\,\langle \hat{p}\hat{x} + \hat{x}\hat{p} \rangle\,(0) - \langle \hat{p} \rangle\,(0)\,\langle \hat{x} \rangle\,(0)\right)\frac{\sin 2\omega t}{m\omega} + \frac{\Delta\hat{p}^2(0)}{m^2\omega^2}\sin^2\omega t.$$

b) Berechnen Sie nun die Varianz von $\hat{x}$ als Funktion der Zeit für ein freies Teilchen in einer Dimension und zeigen Sie, dass das Ergebnis mit dem Grenzfall $\omega \to 0$ der obigen Formel übereinstimmt.

c) Wir betrachten die kohärenten Zustände für den eindimensionalen harmonischen Oszillator, d.h. die Zustände $|\alpha\rangle$ mit $\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle$. Zeigen Sie, dass für diese Zustände gilt

$$\frac{d}{dt}\Delta\hat{x}^2(t) = \frac{d}{dt}\Delta\hat{p}^2(t) = 0, \qquad \sqrt{\Delta\hat{x}^2}\sqrt{\Delta\hat{p}^2} = \frac{\hbar}{2}.$$

d) Wir betrachten ein eindimensionales System mit Potential $V(x) = \alpha x^2 + \beta x^4$. Für welche Werte von α und β sind die Bewegungsgleichungen für $\langle \hat{x} \rangle$ und $\langle \hat{p} \rangle$ identisch zu den klassischen Bewegungsgleichungen für x und p?
Hinweis: Hier brauchen Sie nicht viel rechnen.