Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
Dr. T. Klose, D. Müller, H. Münkler, Prof. Dr. J. Plefka

Übungsblatt 2, Abgabe am Fr. 01.11.13 vor der Vorlesung,
Besprechung in den Übungen am Mo. 04.11.13 bzw. Mi. 06.11.13.

1 Rotierendes Teilchen im Magnetfeld

Gegeben sei ein Teilchen der Masse m und Ladung e, welches auf einer Kreisbahn mit Radius a gehalten wird.

a) Man bestimme die Eigenfunktionen und Energieeigenwerte des Hamilton-Operators dieses Problems $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}\,\partial_\phi^2$ wobei ϕ den Winkel der Kreisbahn bezeichnet.

b) Wie lautet der Erwartungswert des magnetischen Moments $\langle \hat{\mu}_z \rangle$ dieses Teilchen in einem Energieeigenzustand? Zur Erinnerung: $\vec{\mu} = \frac{e}{2mc}\vec{L}$.

c) Nun werde ein homogenes Magnetfeld $\vec{B}$ senkrecht zur Kreisbahn eingeschaltet. Man bestimme ein Vektorpotential für das Problem in geeigneten Koordinaten.

d) Bestimmen Sie nun die Eigenfunktionen und Eigenwerte des dazugehörigen Hamilton-Operators!

2 Landau-Niveaus

Ein freies Elektron, das sich im homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$ mit $B > 0$ in der x-y-Ebene bewegt, wird durch den Hamilton-Operator ($\omega_c := |eB/mc|$, wobei $e = -|e|$)

$$\hat{H}_\perp = \hbar\omega_c \left(\hat{a}^\dagger\, \hat{a} + \frac{1}{2} \right) , \qquad \text{mit} \quad \hat{a} := \frac{\hat{\pi}_2 + i\hat{\pi}_1}{\sqrt{2\hbar}} \,.$$

beschrieben, wobei $\hat{\vec{\pi}} := \frac{1}{\sqrt{m\omega_c}}\,[\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c}\,\vec{A}(\hat{\vec{x}})]$ mit dem Vektorpotential $\vec{A} = \frac{B}{2}\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$. Wir betrachten nun die komplexen Kombinationen von Orten und Impulsen in der Ebene

$$x_\pm = \frac{x_2 \pm i x_1}{\sqrt{2}} \,, \qquad p_\pm = \frac{p_2 \mp i p_1}{\sqrt{2}} \,.$$

a) Bestimmen Sie die Vertauschungsrelationen der Operatoren $\hat{x}_\pm$ und $\hat{p}_\pm$. Stellen Sie dann diese Operatoren in der Ortsdarstellung mittels $x_\pm$ und $\partial_\pm \equiv \partial/\partial x_\pm$ dar.

b) Drücken Sie nun auch die Leiteroperatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ in der Ortsdarstellung aus. Vergewissern Sie sich, dass die Leiteroperatoren die erwartete Vertauschungsrelation erfüllen.

c) Zeigen Sie, dass der hochgradig entartete Grundzustand der Landau-Niveaus die Form

$$\psi_0(x_+, x_-) = f(x_+)\, \exp\left[-\frac{x_+\, x_-}{2\, r_0^2} \right]$$

hat, wobei $r_0 := \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_c}}$ die "magnetische Länge" und $f(x_+)$ eine beliebige Funktion ist.

d) Beschränken Sie sich im Folgenden auf den Fall, dass $f(x_+) \equiv f_0$ konstant ist. Schreiben Sie einen Ausdruck für die Wellenfunktionen der angeregten Zustände $\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}\,(\hat{a}^\dagger)^n\,\psi_0$.

e) Bestimmen Sie das Maximum der radialen Wahrscheinlichkeitsdichte $w_n := \rho\,|\psi_n|^2$ mit $\rho := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{2x_+ x_-}$ für die obigen Zustände. Diskutieren Sie Ihr Ergebnis.