Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
Dr. T. Klose, D. Müller, H. Münkler, Prof. Dr. J. Plefka

ÜBUNGSBLATT 3, Abgabe am Fr. 08.11.13 vor der Vorlesung,
Besprechung in den Übungen am Mo. 11.11.13 bzw. Mi. 13.11.13.

1 Rotationen im Spinraum

In der gewöhnlichen Basis werden "up"- und "down"-Spins durch die Spinoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

dargestellt. Der Spin-Operator $\hat{\vec{S}}$ ist in dieser Basis durch $\hat{\vec{S}} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ gegeben, wobei $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ ein 3-Vektor ist, dessen Komponenten die Pauli-Matrizen

$$\sigma_x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sind. Eine Rotationen um den Winkel ϕ um die Achse $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ ($\vec{n}^2 = 1$) induziert eine "Rotation" im Spinraum, welche durch den Operator

$$\hat{U}_{\vec{n}}(\phi) := e^{i\frac{\phi}{\hbar}\hat{S}_{\vec{n}}} \qquad \text{mit } \hat{S}_{\vec{n}} := \vec{n} \cdot \hat{\vec{S}}$$

erzeugt werden.

a) Zeigen Sie, dass der Operator $\hat{U}_{\vec{n}}(\phi)$ in der obigen Basis durch die 2×2 Matrix

$$\hat{U}_{\vec{n}}(\phi) = \mathbb{1} \cos\frac{\phi}{2} + i\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \sin\frac{\phi}{2}\,.$$

gegeben ist. Verwenden Sie dazu die "magische Identität" $\sigma_a\sigma_b = \delta_{ab}\mathbb{1} + i\epsilon_{abc}\sigma_c$.

b) Berechnen Sie für einen beliebigen Spinor $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix}$ den transformierten Spinor $\varphi' = \hat{U}_{\vec{n}}(\phi)\varphi$ und bestimmen Sie den kleinsten positiven Winkel $\phi > 0$ für den $\varphi' \equiv \varphi$.

c) Der Spinoperator $\hat{S}_{\vec{m}} := \vec{m} \cdot \hat{\vec{S}}$ selbst transformiert gemäß $\hat{U}_{\vec{n}}(\phi)\hat{S}_{\vec{m}}U_{\vec{n}}(\phi)^\dagger$. Zeigen Sie, dass

$$\hat{U}_{\vec{n}}(\phi)\hat{S}_{\vec{m}}U_{\vec{n}}(\phi)^\dagger = (\vec{n} \cdot \vec{m})\hat{S}_{\vec{n}} + (\hat{S}_{\vec{m}} - (\vec{n} \cdot \vec{m})\hat{S}_{\vec{n}}) \cos\phi - \hat{S}_{\vec{n}\times\vec{m}} \sin\phi.$$

Was ist der kleinste positive Winkel $\phi > 0$ für den $\hat{U}_{\vec{n}}(\phi)\hat{S}_{\vec{m}}U_{\vec{n}}(\phi)^\dagger \equiv \hat{S}_{\vec{m}}$?

2 Spinpräzession

Das zu betrachtende System bestehe aus einem Spin $s = 1/2$ Teilchen in einem homogenen Magnetfeld und werde durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{e}{mc}\vec{B} \cdot \hat{\vec{S}}$$

beschrieben. Verwenden Sie in Ihren Ergebnissen die Notation $\omega = \frac{e|\vec{B}|}{mc}$.

a) Der Zustand des Systems sei dargestellt durch den Spinor

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \alpha_+(t) \\ \alpha_-(t) \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie die Schrödinger-Gleichung für $\varphi(t)$ für den Fall $\vec{B} = B\vec{e}_z$ und der Anfangsbedingung $\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass dieser Anfangszustand ein Teilchen mit Spin in Richtung der positives x-Achse beschreibt. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, den Wert $\hbar/2$ bei der Messung von S_x zu einem späteren Zeitpunkt t zu messen.

b) Lösen Sie die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen für die Komponenten des Spinoperators $\hat{\vec{S}}(t)$ für den Fall $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Bestimmen Sie daraus den Erwartungswert $\langle S_x \rangle(t)$ als Funktion der Zeit unter der Anfangsbedingung $\langle \vec{S} \rangle(0) = \frac{\hbar}{2}\vec{e}_x$.

3 System zweier Spin 1/2 Teilchen

Gegeben sei der Operator $\hat{\mathcal{P}}$ in einem zusammengesetzten System zweier Spin $s = 1/2$ Operatoren $\hat{\vec{S}}_i$ (eine Minispinkette):

$$\hat{\mathcal{P}} := \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + \frac{4}{\hbar^2}\,\hat{\vec{S}}_1 \cdot \hat{\vec{S}}_2\right),$$

a) Man berechne $\hat{\mathcal{P}}|m_1, m_2\rangle$, wobei $|m_1, m_2\rangle := |m_1\rangle|m_2\rangle$ die gemeinsamen Eigenzustände von $\hat{S}_{1,z}$ und $\hat{S}_{2,z}$ sind. Was folgt daraus für die Wirkung von $\hat{\mathcal{P}}^2$ auf $|m_1, m_2\rangle$?

b) Schreiben Sie $\hat{\mathcal{P}}$ in der Basis $\{|{+}{+}\rangle, |{+}{-}\rangle, |{-}{+}\rangle, |{-}{-}\rangle\}$ als 4×4 Matrix. Berechnen Sie die Eigenwerte von $\hat{\mathcal{P}}$ und deren Entartung.

c) Stellen Sie die Operatoren $S_{1,x}S_{2,y}$ und $S_{1,y}S_{2,x}$ ebenfalls in der obigen Basis dar.