Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
Dr. T. Klose, D. Müller, H. Münkler, Prof. Dr. J. Plefka

Fortgeschrittene Quantentheorie WS 2013/14

Übungsblatt 4, Abgabe am Fr. 15.11.13 vor der Vorlesung, Besprechung in den Übungen am Mo. 18.11.13 bzw. Mi. 20.11.13.

1 Messungen an einem Spin-1/2 System

Ein Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen befinde sich im Zustand $|+\rangle$, wobei $|\pm\rangle$ die Eigenzustände der Spinkomponente in z-Richtung, $\hat{S}_z$, bezeichne. Berechnen Sie die möglichen Messwerte und deren Wahrscheinlichkeit für die Messung der Spinkomponente $\hat{S}_{\vec{n}}$ bezüglich einer beliebigen Richtung $\vec{n}$.

Tipp: Parametrisieren Sie den Einheitsvektor $\vec{n}$ durch sphärische Koordinaten θ, φ auf die übliche Weise. (Einige Formeln sind am kompaktesten, wenn man sie als Funktion von $\theta/2$ schreibt.)

2 Zwei-Spin-System

Der Hamiltonoperator zweier wechselwirkender Spins-$\frac{1}{2}$ Teilchen in einem magnetischen Feld B ist durch

$$\hat{H} := -J\,\hat{\vec{S}}_1 \cdot \hat{\vec{S}}_2 - \gamma\,B(\hat{S}_{1,z} + \hat{S}_{2,z})$$

gegeben. $\hat{\vec{S}}_1$ und $\hat{\vec{S}}_2$ sind die gewöhnlichen Spinoperatoren, und J und γ sind reelle Konstanten. Bestimmen Sie die Energieeigenwerte dieses Systems und geben Sie die Eigenzustände in der Produktbasis $\{|{++}\rangle, |{+-}\rangle, |{-+}\rangle, |{--}\rangle\}$ sowie in der Gesamtspinbasis $\{|s,m\rangle\}$ an.

Tipp: Der erste Term in $\hat{H}$ lässt sich als linear Kombination der Operatoren $\hat{\vec{S}}^2$, $\hat{\vec{S}}_1^2$ und $\hat{\vec{S}}_2^2$ schreiben, wobei $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ der Gesamtspin ist. Dieses Umschreiben ist hilfreich aber nicht notwendig. Alternativ können Sie auch Leiteroperatoren verwenden.

3 Drei-Spin-System

Diese Aufgabe ist die Verallgemeinerung der vorhergehenden für den Fall dreier Spins. Alle Spins wechselwirken miteinander und mit dem äußeren Magnetfeld gemäß des Hamiltonoperators

$$\hat{H} := -J \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{3} \hat{\vec{S}}_i \cdot \hat{\vec{S}}_j - \gamma B \sum_{i=1}^{3} \hat{S}_{i,z}\ .$$

Formen Sie zunächst aus den Produktzuständen $\{|{+}{+}{+}\rangle, |{+}{+}{-}\rangle, \ldots\}$ eine Basis aus Eigenzuständen $\{|s,m\rangle\}$ der Operatoren $\hat{\vec{S}}^2$ und $\hat{\vec{S}}_z$, wobei $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3$ der totale Spin ist. Berechnen Sie dann die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\hat{H}$ in dieser Basis.

Tipp: Benutzen Sie den Tipp aus der vorhergehenden Aufgabe verallgemeinert auf drei Spins.