Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
Dr. T. Klose, D. Müller, H. Münkler, Prof. Dr. J. Plefka

Übungsblatt 5, Abgabe am Fr. 22.11.13 vor der Vorlesung,
Besprechung in den Übungen am Mo. 25.11.13 bzw. Mi. 27.11.13.

1 Verschränkter Zustand

Ein Spin-0 Teilchen zerfalle in zwei Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen. Der Zustands-Ket, der die beiden Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen beschreibt, hat in der Produktbasis die Form

$$|\psi\rangle = a_{++}\,|{+}{+}\rangle + a_{+-}\,|{+}{-}\rangle + a_{-+}\,|{-}{+}\rangle + a_{--}\,|{-}{-}\rangle$$

mit $a_{ij} \in \mathbb{C}$. Da das urspüngliche Teilchen keinen Spin hatte, folgt aus der Drehimpulserhaltung, dass auch der totale Spin der beiden Zerfallsprodukt Null sein muss.

a) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_{ij} so, dass $|\psi\rangle$ ein Eigenvektor zum Operator $\hat{\vec{S}}^2$ mit Eigenwert Null ist, wobei $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ den Gesamtspin bezeichnet.

b) Nehme Sie an, dass am Zustand $|\psi\rangle$ [mit den Koeffizienten aus Aufgabenteil a)] die Messung von $\hat{S}_{1,z}$ den Wert $\frac{\hbar}{2}$ ergeben habe. Was sind die möglichen Messwerte und deren Wahrscheinlichkeiten für die Messung von $\hat{S}_{2,z}$ am durch die erste Messung kollabierten Zustand $|\psi\rangle'$? Wie lautet die Antwort auf die gleiche Frage, wenn die erste Messung $-\frac{\hbar}{2}$ ergeben hätte?

c) Vermutlich haben Sie im vorangehenden Aufgabenteil gefunden, dass die Messungen der z-Komponenten der Spins anti-korreliert sind. Zeigen Sie nun, dass das Gleiche auch für die Messung der Spin-Komponenten in eine beliebige Richtung $\vec{n}$ gilt.

   Tipp: Erinnern Sie sich an das letzte Übungsblatt und verwenden Sie Polarkoordinaten θ und φ um $\vec{n}$ zu parametrisieren.

d) Überzeugen Sie sich, dass aus der Anti-Korrelation der Spins folgender Erwartungswert folgt:

$$\langle\psi|\,\hat{S}_{1,\vec{n}}\hat{S}_{2,\vec{n}}\,|\psi\rangle = -\frac{\hbar^2}{4}\ .$$

   Was ist die Korrelation der Spins bezüglich unterschiedlicher Richtungen, also was ist der Erwartungswert $\langle\psi|\,\hat{S}_{1,z}\hat{S}_{2,\vec{n}}\,|\psi\rangle$?

   Bemerkung: Dieser Korrelator wird wesentlich sein, wenn wir später zeigen wollen, dass die Quantenmechanik *nicht* durch eine deterministische Theorie mit verborgenen Variablen ersetzt werden kann. Stay tuned!

2 Störung im Potentialkasten

Ein Teilchen sei eingeschlossen in einen Würfel mit Kantenlänge a definiert durch das Potential

$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le x,y,z \le a\ , \\ \infty & \text{sonst}\ . \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die stationären Zustände in der Ortsdarstellung und deren Energie. Liegt Entartung vor?

b) Nun werde die Störung

$$H_1 = \begin{cases} V_0 & \text{für } 0 \le x,y \le \frac{a}{2}\,, 0 \le z \le a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eingeschaltet. Berechnen Sie die Korrektur der Energie und der Wellenfunktion des Grundzustands in Störungstheorie zur ersten Ordnung.

c) Berechnen Sie für obige Störung nun dieselben Korrekturen für den ersten angeregten Zustand.

3 Das Exponentialintegral und asymptotische Reihen

Wir sagen, dass die Funktion $f(\lambda)$ durch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$ *asymptotisch* dargestellt wird, falls

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda^N} \left(f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^n \right) = 0 \,, \qquad \forall N \geq 0.$$

Diese Funktion könnte beispielsweise die Energie f eines Zustands in Abhängigkeit von der Kopplungskonstanten λ beschreiben. Berechnet man die Energie in Störungstheorie für schwache Kopplung, erhält man eine Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$, welche typischerweise die exakte Lösung "nur" asymptotisch darstellt. Diese Aufgabe soll veranschaulichen, was das bedeutet.

Betrachten wir das Beispiel $f(\lambda) = \frac{e^{1/\lambda}}{\lambda} \int_1^{\infty} \frac{e^{-t/\lambda}}{t} dt$ für $\lambda > 0$.

a) Zeigen Sie mittels $(n+1)$-facher partieller Integration, dass $f(\lambda)$ geschrieben werden kann als

$$f(\lambda) = 1 - \lambda + 2!\lambda^2 - \cdots + (-1)^n n! \lambda^n + R_{n+1}(\lambda)$$

und berechnen Sie $R_{n+1}(\lambda)$.

b) Zeigen Sie, dass $f(\lambda)$ durch die divergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! \lambda^n$ asymptotisch dargestellt wird.

c) Sei λ fest. Schätzen Sie grob ab, für welchen Wert $N(\lambda)$ die Reihe $\sum_{n=0}^{N(\lambda)} (-1)^n n! \lambda^n$ die beste Näherung für $f(\lambda)$ gibt. Zeichnen Sie mit einem Funktionsplotter im Intervall $0 \leq \lambda \leq 0.5$ die exakte Funktion $f(\lambda)$ sowie

$$\sum_{n=0}^{N} (-1)^n n! \lambda^n$$

für eine Auswahl von N's auf.

Hinweis: Die Funktion $f(\lambda)$ kann in Mathematica als `Exp[1/λ]/λ ExpIntegralE[1, 1/λ]` eingegeben werden.