Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
Dr. T. Klose, D. Müller, H. Münkler, Prof. Dr. J. Plefka

Übungsblatt 7, Abgabe am Fr. 06.12.13 vor der Vorlesung, Besprechung in den Übungen am Mo. 09.12.13 bzw. Mi. 11.12.13.

1 Harmonischer Oszillator im kanonischen Ensemble

Der Zustand eines ein- bzw. zweidimensionalen harmonischen Oszillators sei gegeben durch den statistischen Operator

$$\hat{\rho} = \frac{\exp[-\beta \hat{H}]}{\mathrm{Sp}(\exp[-\beta \hat{H}])} ,$$

wobei $\beta > 0$ ein Parameter ist. Wie sich im nächsten Semester herausstellen wird, beschreibt dieser Operator ein Ensemble aus harmonischen Oszillatoren bei Temperatur T, wenn man β mit $\frac{1}{kT}$ identifiziert, wobei k die Boltzmann-Konstante ist.

a) Im Falle des eindimensionalen Oszillators, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit die Energiewerte $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ zu messen? Wie groß ist der Erwartungswert der Energie? Was erhalten Sie im Grenzfall $T \to 0$?

b) Im Falle des zweidimensionalen Oszillators, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit die Energiewerte $E_n = \hbar\omega(n + 1)$ zu messen und wie groß ist der Erwartungswert der Energie?

Hinweis: Achten Sie auf mögliche Entartung!

2 Statistischer Operator eines Spin-$\frac{1}{2}$ Systems

Nehmen Sie an, Sie kennen die drei Erwartungswerte $\langle S_i \rangle$ für den (nicht notwendigerweise reinen) Zustand eines Spin $s = 1/2$ Systems.

a) Bestimmen Sie den statistische Operator $\hat{\rho}$ für diesen Zustand ausgedrückt durch die bekannten Erwartungswerte.

Tipp: Jeder hermitesche Operator, der auf einen zweidimensionalen Hilbertraum wirkt kann als Linearkombination $\hat{\rho} = c_0 \mathbb{1} + \vec{c} \cdot \vec{\sigma}$ geschrieben werden.

b) Leiten Sie aus der Eigenschaft $\mathrm{Sp}(\hat{\rho}^2) = 1$, die für einen reinen Zustand gilt, eine Bedingung für die Erwartungswerte $\langle S_i \rangle$ her.

c) Zeigen Sie, dass diese Bedingung für den reinen Zustand $|\psi\rangle = a\,|+\rangle + b\,|-\rangle$ mit $|a|^2 + |b|^2 = 1$ erfüllt ist.

Bitte Rückseite nicht übersehen.

3 Reduzierte Dichtematrix

Wir betrachten einen Produkthilbertraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, wobei $\mathcal{H}_1$ die Orthonormalbasis $\{|n\rangle\}_n$ und $\mathcal{H}_2$ die Orthonormalbasis $\{|\alpha\rangle\}_\alpha$ besitzt.

a) Schreiben Sie die allgemeinste Dichtematrix $\hat{\rho}$ in der Basis $|n, \alpha\rangle = |n\rangle \otimes |\alpha\rangle$ von $\mathcal{H}$.

b) Wir definieren die *reduzierte* Dichtematrix $\hat{\rho}_r := \mathrm{Sp}_2(\hat{\rho}) := \sum_\alpha \langle\alpha|\,\hat{\rho}\,|\alpha\rangle$. Schreiben Sie $\hat{\rho}_r$ in der Basis $\{|n\rangle\}_n$ und zeigen Sie, dass $\hat{\rho}_r$ die Eigenschaften einer Dichtematrix hat.

c) Wir betrachten nun ein freies Teilchen in einem zweidimensionalen Kasten mit Seiten der Länge L_x bzw. L_y. Als Basis für den Hilbertraum nehmen wir die Eigenzustände $|n_x, n_y\rangle$ des Hamiltonoperators mit Wellenfunktion

$$\big\langle x, y\big|n_x, n_y\big\rangle = \frac{1}{\sqrt{L_x L_y}} e^{2\pi i\left(\frac{n_x}{L_x}x + \frac{n_y}{L_y}y\right)}, \quad n_x, n_y \in \mathbb{Z}\,.$$

- Das Gesamtsystem sei in einem der reinen Zustände $|\psi\rangle$, die durch zwei Zahlen $m_x, m_y \in \mathbb{Z}$ charakterisiert sind und durch die Wellenfunktionen

$$\big\langle x, y\big|\psi\big\rangle = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L_x L_y}} \cos\left[2\pi\left(\frac{m_x}{L_x}x + \frac{m_y}{L_y}y\right)\right] & \text{für } m_x \neq 0 \text{ oder } m_y \neq 0\,, \\ \frac{1}{\sqrt{L_x L_y}} & \text{für } m_x = m_y = 0\,. \end{cases}$$

  beschrieben werden. Schreiben Sie deren Dichtematrix $\hat{\rho}^\psi$ in der Basis $\{|n_x, n_y\rangle\}_{n_x, n_y}$.

- Berechnen Sie durch Spuren von $\hat{\rho}^\psi$ über $\mathcal{H}_2$ die auf $\mathcal{H}_1$ reduzierte Dichtematrix $\hat{\rho}_r^\psi$. Beschreibt $\hat{\rho}_r^\psi$ einen reinen oder einen gemischten Zustand in $\mathcal{H}_1$?