Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
Dr. T. Klose, D. Müller, H. Münkler, Prof. Dr. J. Plefka

Fortgeschrittene Quantentheorie WS 2013/14

Übungsblatt 8, Abgabe am Fr. 13.12.13 vor der Vorlesung,
Besprechung in den Übungen am Mo. 16.12.13 bzw. Mi. 18.12.13.

1 **Bellsche Ungleichung**

Es gibt viele Ungleichungen, die für jede Theorie versteckter Variablen gelten müssen. Wir haben eine in der Vorlesung hergeleitet. Jetzt leiten Sie eine andere her.

Sei $\lambda$ eine versteckte Variable[1], die ihren Wert zum Zeitpunkt der Erzeugung des verschränkten Zustands $|0,0\rangle$ (Singulett) bekommt und die die Werte aller zukünftigen Messungen festlegt. D.h. es gibt eine Funktion $A(\vec{a},\lambda)$, die das Ergebnis der Messung der Komponente des ersten Spins in Richtung $\vec{a}$ definiert. Genauso gibt es eine Funktion $B(\vec{b},\lambda)$, die das Ergebnis der Messung der Komponente des zweiten Spins in Richtung $\vec{b}$ definiert. Der Einfachheit halber seien die Funktionen so normiert, dass sie die Werte $\pm 1$ annehmen. Das heißt $+1$ steht für das Messergebnis $\frac{\hbar}{2}$ und $-1$ für $-\frac{\hbar}{2}$. Wir wissen[2] außerdem, dass

$$B(\vec{b},\lambda) = -A(\vec{b},\lambda)$$

für beliebige $\vec{b}$ und $\lambda$.

Wir wissen allerdings nicht, welchen Wert $\lambda$ bei der Erzeugung des Zustands annimmt und wir haben auch keine Möglichkeit diesen Wert zu messen, denn sonst wäre es ja keine *versteckte* Variable. Wenn wir viele dieser Zustände erzeugen, dann werden die zugehörigen versteckten Variablen irgendwelche Werte haben. Diese Werte seien durch die Verteilung $\rho(\lambda)$ beschrieben, d.h. $\rho(\lambda_0)$ ist die relative Häufigkeit der Zustände für die $\lambda = \lambda_0$. Wir kennen diese Verteilung nicht, aber per Definition erfüllt sie

$$0 \le \rho(\lambda) \le 1 \ , \qquad \int d\lambda\, \rho(\lambda) = 1 \ .$$

Schließlich definieren wir den Korrelator zweier Spin-Messungen als

$$P(\vec{a},\vec{b}) := \frac{4}{\hbar^2}\langle 0,0|S_{1,\vec{a}}S_{2,\vec{b}}|0,0\rangle \ ,$$

den wir auf Übungsblatt 5 für die Quantentheorie berechnet hatten. In der Theorie der versteckten Variablen ist er geben durch

$$P(\vec{a},\vec{b}) = \int d\lambda\, \rho(\lambda) A(\vec{a},\lambda) B(\vec{b},\lambda) \ .$$

a) Leiten Sie die Ungleichung
$$|P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c})| \le 1 + P(\vec{b},\vec{c})$$
her.

*Tipp:* An einer Stelle müssen Sie $|A(\vec{b},\lambda) - A(\vec{c},\lambda)| = 1 - A(\vec{b},\lambda)A(\vec{c},\lambda)$ verwenden, dessen Richtigkeit Sie leicht dadurch zeigen können, dass Sie alle Werte ausprobieren.

b) Zeigen Sie, dass diese Ungleichung für die Achsen $\vec{a} = \vec{e}_x$, $\vec{b} = \vec{e}_y$ und $\vec{c} = (\vec{e}_x + \vec{e}_y)/\sqrt{2}$ im Widerspruch zur quantenmechanischen Vorhersage steht.

*Erinnerung:* Auf Übungsblatt 5 hatten wir $\langle 0,0|S_{1,\vec{a}}S_{2,\vec{b}}|0,0\rangle = -\frac{\hbar^2}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}$ gefunden.

[1] Es könnte sich im konkreten Fall auch um einen ganzen Satz versteckter Variablen handeln. Ist dies so, dann sei mit $\lambda$ der gesamte Satz bezeichnet.

[2] Wenn das nicht so wäre, dann würde die Theorie der versteckten Variablen sofort im Widerspruch zum Experiment stehen, denn diese Beziehung drückt einfach nur die Antikorrelation der Spins im Singulett-Zustand aus.

## 2 Alice, Bob und Charlie

Für $b \in \{0, 1\}$ sei $|\psi_b\rangle$ definiert als der Zwei-Qubit-Zustand

$$|\psi_b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |00\rangle + (-1)^b \, |11\rangle \right) \ .$$

Alice und Bob besitzen je ein Qubit, welche sich als Gesamtsystem im Zustand $|\psi_b\rangle$ für unbekanntes $b$ befinden. Ziel von Alice und Bob ist es herauszufinden, ob für ihren Zustand $b = 0$ oder $b = 1$ ist. Die Regeln sind folgende. Alice und Bob dürfen so viel an ihrem eigenen Qubit transformieren und messen wie sie wollen, aber sie haben keinen Zugang zum Qubit des anderen. Ferner dürfen Alice und Bob nicht miteinander kommunizieren. Alice und Bob dürfen jedoch je ein klassisches Bit an Charlie senden.

Finden Sie eine Strategie (= "Protokoll" in der Sprache der Quanteninformatik), auf die sich Alice, Bob und Charlie einigen, so dass Charlie aus der ihm zugesandten Information den Wert für $b$ bestimmen kann.

## 3 Dichte Kodierung

Alice möchte Bob eine "Nachricht" schicken, und zwar möchte sie ihm eine der Zahlen 0, 1, 2 oder 3 "verpackt" in einem Qubit schicken. Dazu verwendet sie ein Qubit, das mit einem Qubit von Bob im Bell-Zustand

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)$$

verschränkt ist. (Dieses Qubit-Paar hatten sich die beiden vorsorglich schon mal erzeugt. Man weiß ja nie, wann man sowas mal gebrauchen kann.) Je nachdem welche der Zahlen Alice übermitteln will, wendet sie auf ihr Qubit eine Transformation $T_i$ (mit $i \in \{0, 1, 2, 3\}$) an und schickt dann das Qubit zu Bob. Bob darf anschließend, wenn er will, seinerseits eine Transformation auf eines oder beide der Qubits anwenden und schließlich eine oder mehrere Messungen durchführen.

Entwerfen Sie ein Protokoll, auf das sich Alice und Bob einigen könnten, um solch eine Kommunikation durchzuführen.