Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
Dr. T. Klose, D. Müller, H. Münkler, Prof. Dr. J. Plefka

Fortgeschrittene Quantentheorie WS 2013/14

Übungsblatt 9, Abgabe am Fr. 20.12.13 vor der Vorlesung,
Besprechung in den Übungen am Mo. 06.01.14 bzw. Mi. 08.01.14.

1 Relativistisches Teilchen trifft auf eine Potentialstufe

a) Betrachten wir zunächst die Klein-Gordon-Gleichung für ein freies Teilchen in einer Dimension

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi(t,x) = 0\ .$$

Reduzieren Sie diese Gleichung mittels Separationsansatz $\psi(t,x) = e^{-iEt/\hbar}\varphi(x)$ auf eine gewöhnliche Differentialgleichung für $\varphi(x)$. Berechnen Sie die allgemeine Lösung dieser Gleichung für gegebene Energie $E > mc^2$.

b) Koppeln wir nun das Teilchen an das elektrische Stufenpotential

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \Phi_0 & x > 0 \end{cases}$$

mit $\Phi_0 > 0$. Dies geschieht durch die Substitution $i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\Phi$. Die Ladung q des Teilchens sei positiv. Im Bereich $x < 0$ gilt die Lösung aus Teil a). Machen Sie im Bereich $x > 0$ den gleichen Separationsansatz wie oben und lösen Sie die zeitunabhängige Gleichung für $\varphi(x)$. Setzen Sie nun die Integrationskonstanten in den beiden Bereichen in Beziehung, so dass $\psi(t,x)$ und $\frac{\partial\psi}{\partial x}(t,x)$ für alle t stetig bei $x = 0$ sind.

c) Wir interessieren uns nun für die Wahrscheinlichkeit mit der das Teilchen die Potentialstufe, die so hoch sei, dass $q\Phi_0 > 2mc^2$, überwindet bzw. daran reflektiert wird. Wählen Sie dazu die Integrationskonstanten so, dass die Lösung im Bereich $x < 0$ die Form

$$\varphi(x) = \varphi_{\text{ein}}(x) + \varphi_{\text{refl}}(x) \qquad \text{mit} \qquad \varphi_{\text{ein}}(x) = A_{\text{ein}}e^{ik_1x}\ ,\ \ \varphi_{\text{refl}}(x) = A_{\text{refl}}e^{-ik_1x}$$

und im Bereich $x > 0$ die Form

$$\varphi(x) = \varphi_{\text{trans}}(x) = A_{\text{trans}}e^{ik_2x}$$

hat. Berechnen Sie die Teilchenströme

$$j_{\text{a}} = \frac{\hbar}{2mi}\left[\varphi_{\text{a}}^*\frac{d\varphi_{\text{a}}}{dx} - \frac{d\varphi_{\text{a}}^*}{dx}\varphi_{\text{a}}\right]$$

für a = "ein", "refl" und "trans" und daraus den Reflexionskoeffizienten $R = -\frac{j_{\text{refl}}}{j_{\text{ein}}}$ sowie den Transmissionskoeffizienten $T = \frac{j_{\text{trans}}}{j_{\text{ein}}}$. Tun Sie dies für die qualitativ unterschiedlichen Fälle

(i) $E > q\Phi_0 + mc^2$,
(ii) $E < q\Phi_0 + mc^2$ aber $E > q\Phi_0 - mc^2$,
(iii) $E < q\Phi_0 - mc^2$ aber $E > mc^2$.

Hinweis: Falls Sie Ihr Ergebnis im Fall (iii) für unmöglich halten, dann ist es vermutlich richtig.

Bitte Rückseite nicht übersehen.

2 Die Lorentzgruppe und die Eigenschaften der Matrizen $\vec{\alpha}$ und β

a) Eine Lorentztransformation des Vierervektors $x^\mu = (ct, x_1, x_2, x_3)$ ist gegeben durch die lineare Transformation $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ mit der Eigenschaft die Vierernorm zu erhalten:

$$x^2 \equiv \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu \,.$$

Es ist oft hilfreich von einer Matrixnotation Gebrauch zu machen, in der der metrische Tensor $\eta_{\mu\nu}$ als Matrix $\boldsymbol{\eta}$ und $\Lambda^\mu{}_\nu$ als Matrix $\boldsymbol{\Lambda}$ geschrieben wird. Zeigen Sie, dass die Lorentzmatrix $\boldsymbol{\Lambda}$ der Matrixgleichung

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\Lambda}$$

genügen muss, wobei T Transposition bedeutet. Beweisen Sie, dass die Menge

$$\mathbf{L} := \{\boldsymbol{\Lambda} \in M(4 \times 4; \mathbb{R}) : \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\Lambda}\}$$

eine Gruppe bildet. Hierzu sind die Gruppenaxiome zu überprüfen, d.h. falls $\boldsymbol{\Lambda}_1$ und $\boldsymbol{\Lambda}_2$ Elemente der Gruppe sind, so ist auch ihr Produkt $\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{\Lambda}_2$ ein Element der Gruppe; weiterhin muss es ein neutrales Element in der Gruppe geben und jedes Element muss ein Inverses in der Gruppe besitzen.

b) Zeigen Sie, dass die Komponenten der inversen Matrix geschrieben werden können als $(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu$. Zeigen Sie dann, dass die Ableitungen $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ gemäß $\partial'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu$ transformieren.

c) In der Vorlesung haben wir die $N \times N$ Matrizen α_i $(i = 1, 2, 3)$ und β eingeführt, die den Antikommutatorrelationen

$$\alpha_i\,\alpha_j + \alpha_j\,\alpha_i = 2\delta_{ij}\,\mathbf{1}\,, \quad \alpha_i\,\beta + \beta\,\alpha_i = 0\,, \quad \beta^2 = \mathbf{1}\,,$$

genügen. Zeigen Sie, dass daraus $\mathrm{Sp}(\alpha_i) = \mathrm{Sp}(\beta) = 0$ folgt und dass die Eigenwerte von α_i und β die Werte ± 1 annehmen!