Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
Dr. T. Klose, D. Müller, H. Münkler, Prof. Dr. J. Plefka

Fortgeschrittene Quantentheorie WS 2013/14

Übungsblatt 10, Abgabe am Fr. 10.01.14 vor der Vorlesung,
Besprechung in den Übungen am Mo. 13.01.14 bzw. Mi. 15.01.14.

1 Natürliche Einheiten

Drücken Sie Ihr Alter, Ihr Gewicht und Ihre Größe in natürlichen Einheiten, d.h. in Gigaelektronenvolt (GeV) aus! Sollten Sie dies als indiskret empfinden, können Sie auch die Daten des Weihnachtsmanns (16 800 Tage, 85 kg, 184 cm) oder des Christkindes (3000 Tage, 35 kg, 110 cm) benutzen.

2 Transformationseigenschaften der γ-Matrizen und des Viererstroms

Seien γ^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ die in der Vorlesung eingeführten 4×4 Matrizen mit $\{\gamma^\mu\,,\,\gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$.

a) Zeigen Sie, dass die Matrizen $\sigma_{\mu\nu} := \frac{i}{2}\,[\gamma_\mu\,,\,\gamma_\nu]$ die folgende Gleichung erfüllen:

$$[\sigma_{\rho\kappa}\,,\,\gamma^\nu] = 2i\left(\delta^\nu_\kappa\gamma_\rho - \delta^\nu_\rho\gamma_\kappa\right)\ .$$

Hinweis: Beweisen und verwenden Sie die Identität: $[AB\,,\,C] = A\,\{B\,,\,C\} - \{A\,,\,C\}\,B$.

b) Sei S eine Lorentztransformation im Spinorraum in der Zusammenhangskomponente der Eins. Mit $\omega^{\mu\nu} \in \mathbb{R}$ können wir $S = \exp(-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu})$ schreiben. Zeigen Sie, dass dann $S^{-1} = \gamma_0 S^\dagger \gamma_0$ gilt.

Hinweis: Beweisen und verwenden Sie die Gleichungen $\gamma^\dagger_\mu = \gamma_0\gamma_\mu\gamma_0$ und $A(e^B)^\dagger A^{-1} = e^{AB^\dagger A^{-1}}$.

c) Wir definieren den Viererstrom $j^\mu := c\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\psi$. Sei S eine Lorentztransformation im Spinorraum und sei $\psi' = S\psi$ der transformierte Spinor. Drücken Sie j'^μ als Funktion von j^μ aus.

3 Lösungen der freien Dirac-Gleichung: ebene Wellen

a) Zeigen Sie, dass die im Skript (siehe S. 70, Gl. (V.106)ff) definierten Spinoren $u_r(p)$ und $v_r(p)$ Lösungen von

$$(\not{p} - m)\,u_r(p) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad (\not{p} + m)\,v_r(p) = 0$$

sind.

Überprüfen Sie weiterhin die folgenden Identitäten.

b) $\bar{u}_r(p)u_s(p) = \delta_{rs}\,, \qquad \bar{v}_r(p)v_s(p) = -\delta_{rs}\,.$

c) $\bar{u}_r(p)\gamma^\mu u_s(p) = \frac{p^\mu}{m}\delta_{rs} = \bar{v}_r(p)\gamma^\mu v_s(p)\,.$

d) $v^\dagger_r(\tilde{p})u_s(p) = 0\,.$

Bitte Rückseite nicht übersehen.

4 Gesamtdrehimpulserhaltung im Zentralpotential

Zeigen Sie durch explizite Berechnung des Kommutators, dass der Gesamtdrehimpuls aus Bahn- und Spindrehimpuls

$$\vec{J} = \mathbf{1}_{4\times 4}\, \vec{x} \times \vec{p} + \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}\,, \qquad \text{wobei} \qquad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

mit dem Dirac-Hamilton-Operator für ein Zentralpotential

$$H = c\Big(\vec{\alpha}\,\vec{p} + \beta mc\Big) + e\,\Phi(|\vec{x}|)$$

vertauscht.

Frohe Weihnachten und alles Gute für das neue Jahr!