Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
Dr. T. Klose, D. Müller, H. Münkler, Prof. Dr. J. Plefka

Fortgeschrittene Quantentheorie WS 2013/14

Übungsblatt 11, Abgabe am Fr. 17.01.14 vor der Vorlesung,
Besprechung in den Übungen am Mo. 20.01.14 bzw. Mi. 22.01.14.

1 Zitterbewegung des relativistischen Elektrons

Lösen Sie die Bewegungsgleichung für den Ortsoperator $\hat{x}(t)$ im Heisenberg-Bild für den Dirac-Hamiltonoperator ($c = \hbar = 1$)

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$$

mit allgemeinen Anfangsbedingungen.

Hinweis: Beachten Sie, dass im Heisenberg-Bild nicht nur die Operatoren x und p, sondern auch die (Matrix-)Operatoren $\vec{\alpha}$ und β zeitabhängig werden und eine Heisenbergsche Bewegungsgleichung erfüllen. Die gewöhnlichen Antikommutator-Relationen für $\vec{\alpha}$ und β gelten für alle Zeiten t.

2 Foldy-Wouthuysen-Transformation für ein freies Teilchen

Ausgehend von der Hamiltonschen Form der freien Dirac-Gleichung ($c = \hbar = 1$)

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi\,, \quad H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m\,,$$

führen wir die unitäre Transformation

$$\psi' = e^{iS}\psi$$

aus, wobei S hermitesch und nicht explizit zeitabhängig sei.

(a) Zeigen Sie, dass ψ' die Dirac-Gleichung $i\frac{\partial \psi'}{\partial t} = H'\psi'$ mit dem transformierten Hamiltonoperator $H' := e^{iS}He^{-iS}$ erfüllt.

Es sei nun S gegeben durch die Gleichung

$$e^{iS} = e^{\beta\,\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\,\vartheta(|\vec{p}|)} = \cos\vartheta(|\vec{p}|) + \frac{\beta\,\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\sin\vartheta(|\vec{p}|)\,.$$

(b) Man berechne den transformierten Hamiltonoperator H'.

(c) Zeigen Sie, dass die Lösungen positiver und negativer Energie der freien Dirac-Gleichung entkoppeln, falls man ϑ durch die Gleichung $\tan[2\vartheta(|\vec{p}|)] = \frac{|\vec{p}|}{m}$ definiert. Wie lautet dann H' und dessen Eigenwerte?