Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
Dr. T. Klose, D. Müller, H. Münkler, Prof. Dr. J. Plefka

Übungsblatt 12, Abgabe am Fr. 24.01.14 vor der Vorlesung,
Besprechung in den Übungen am Mo. 27.01.14 bzw. Mi. 29.01.14.

1 Streuwelle als asymptotische Lösung der Schrödingergleichung

Zeigen Sie, dass die Streuwelle eines in positiver z-Richtung einfallenden Teilchens mit Wellenzahl k

$$\psi_k(r,\vartheta) = e^{ikz} + f_k(\vartheta)\,\frac{e^{ikr}}{r}\,, \quad \text{mit} \quad z = r\cos\vartheta\,,$$

eine asymptotische Lösung der Schrödingergleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r)\right)\psi_k = E_k\psi_k$$

für $r \to \infty$ darstellt, falls das Streupotential V stärker als $1/r$ abfällt.

2 Eindimensionale Streuung am Deltafunktionspotential

Lesen Sie im Vorlesungsskript das Kapitel über die Lippmann-Schwinger-Gleichung:

$$\left|\psi^\pm\right\rangle = |\phi_0\rangle + \frac{1}{E - \hat{H}_0 \pm i\epsilon}\hat{V}\left|\psi^\pm\right\rangle\,. \qquad (\epsilon \to 0)$$

Wir analysieren diese Gleichung nun für eindimensionale Probleme.

a) Leiten Sie unter der Annahme, dass $\hat{V}$ nur von $\hat{x}$ abhängt, die Gleichung

$$\psi_k^\pm(x) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi\hbar}} + \frac{2m}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{\infty} dx' G_k^\pm(x,x')V(x')\psi_k^\pm(x'),$$

her und zeigen Sie, dass

$$G_k^\pm(x,x') := \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\hbar^2}{2m}\langle x|\,\frac{1}{E_k - \hat{H}_0 \pm i\epsilon}\,|x'\rangle = \lim_{\tilde{\epsilon}\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dq}{2\pi}\frac{e^{iq(x-x')}}{k^2 - q^2 \pm i\tilde{\epsilon}} = \mp i\frac{e^{\pm ik|x-x'|}}{2k}.$$

Es gilt hier $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, $\langle x|\phi_0\rangle = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi\hbar}}$, $\langle x|\psi_k^\pm\rangle = \psi_k^\pm(x)$ und $\tilde{\epsilon} = \frac{2m}{\hbar^2}\epsilon$.

b) Wir betrachten nun das eindimensionale Problem der Streuung am Deltafunktionspotential $V(x) = -v\,\delta^{(1)}(x/L)$, wobei v und L beliebige Konstanten sind. Wie lauten für dieses Streuproblem die *exakten* Wellenfunktionen $\psi_k^+(x) = \langle x|\psi_k^+\rangle$? Bestimmen Sie diese durch Lösen der Lippmann-Schwinger Gleichung.