Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
Dr. T. Klose, D. Müller, H. Münkler, Prof. Dr. J. Plefka

Fortgeschrittene Quantentheorie WS 2013/14

Übungsblatt 13, Abgabe am Fr. 31.01.14 vor der Vorlesung,
Besprechung in den Übungen am Mo. 03.02.14 bzw. Mi. 05.02.14.

1 Transfermatrix für Streuung am Deltafunktionspotential in 1d

Die Transfermatrix $T(x,x') = \langle x|\hat{T}|x'\rangle$ erfüllt die Gleichung

$$\hat{T} = \hat{V} + \frac{2m}{\hbar^2}\hat{V}\hat{G}\hat{T} \qquad \text{mit} \qquad \hat{G} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{E - \hat{H}_0 + i\varepsilon} \; .$$

Die iterative Lösung dieser Gleichung führt auf die Neumann-Reihe. Berechnen und summieren Sie die Neumann-Reihe für das eindimensionale Deltafunktionspotential

$$V(x) = -v\,\delta^{(1)}(x/L) \; ,$$

wobei v und L beliebige Konstanten sind. Benutzen Sie für die Ortsdarstellung von $\hat{G}$, den in Übung 12, Aufgabe 2, hergeleiteten Ausdruck

$$G(x,x') = \langle x|\hat{G}|x'\rangle = -\frac{i}{2k}e^{ik|x-x'|} \; .$$

Überprüfen Sie, dass Ihr Ergebnis die Gleichung

$$V(x)\psi^+(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, T(x,x')\phi_0(x') \; ,$$

mit $\psi^+(x)$ und $\phi_0(x')$ ebenfalls aus Aufgabe 2 von Übungsblatt 12, erfüllt.

2 Streuproblem in Bornscher Näherung

Betrachten Sie die Streuung eines Teilchens der Masse m an dem kugelsymmetrischen Potential

$$V(r) = V_0\, e^{-r^2/a^2} \; .$$

Bestimmen Sie den differentiellen und den totalen Wirkungsquerschnitt in der ersten Bornschen Näherung. Überprüfern Sie, ob in dieser Näherung das optische Theorem erfüllt ist.

Bitte Rückseite nicht übersehen.

3 Cauchyscher Hauptwert und Diracsche Deltafunktion

In dieser Aufgabe sollen Sie die folgende Identität beweisen:

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} = \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right) \mp i\pi\delta(x) \, . \tag{1}$$

Die Diracsche Deltafunktion ist bekanntlich definiert durch

$$\int dx \, \delta(x) f(x) = f(0)$$

für Testfunktionen $f(x)$. Der Cauchysche Hauptwert von $\frac{1}{x}$ ist definiert durch

$$\int dx \, \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right) f(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{f(x)}{x} \, .$$

Beweisen Sie obige Identität indem zu zunächst zeigen, dass die Diracsche Deltafunktion und der Cauchysche Hauptwert von $\frac{1}{x}$ wie folgt dargestellt werden können:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \qquad , \qquad \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} \, . \tag{2}$$

Bemerkungen: Unsere Testfunktionen seien glatt und haben einen kompakten Träger, d.h. es existieren $a, b \in \mathbb{R}$ sodass f außerhalb des Intervalls $[a, b]$ verschwindet. Wie immer bei Distributionen ist in den Formeln (1) und (2) impliziert, dass der Limes $\varepsilon \to 0$ ($\varepsilon > 0$) erst *nach* der Integration zu nehmen ist. Verhalten Sie sich bei dieser Aufgabe wie anständige Mathematiker und vertauschen Sie nicht unbegründet Grenzwertbildung und Integration. Beachten Sie statt dessen den folgenden "Satz über dominierte Konvergenz":

Sei $\varphi_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Folge integrierbarer Funktionen, die für $n \to \infty$ punktweise gegen eine Funktion $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiere. Falls eine integrierbare Funktion $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}$ existiert mit $|\varphi_n(x)| \leq \rho(x)$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist φ integrierbar und es gilt

$$\int_a^b \varphi(x) \, dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b \varphi_n(x) \, dx \, .$$