Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
Dr. T. Klose, D. Müller, H. Münkler, Prof. Dr. J. Plefka

Fortgeschrittene Quantentheorie WS 2013/14

Übungsblatt 14, Abgabe am Fr. 07.02.14 vor der Vorlesung,
Besprechung in den Übungen am Mo. 10.02.14 bzw. Mi. 12.02.14.

1 Austauschwechselwirkung

Wir betrachten ein System aus zwei identischen, nicht-wechselwirkenden Teilchen. Die Tatsache, dass keine Kraft zwischen den Teilchen wirkt, drückt sich dadurch aus, dass der Hamiltonoperator die Form $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$ hat, wobei $\hat{H}_1$ nur auf Teilchen 1 und $\hat{H}_2$ nur auf Teilchen 2 wirkt. Die Tatsache, dass beide Teilchen identisch sind, bedeutet, dass $\hat{H}_1$ und $\hat{H}_2$ formal gleich sind, also dass $\hat{H}_i = H(\hat{x}_i, \hat{p}_i)$ aus der gleichen Hamiltonfunktion $H(x,p)$ erhalten wurden.

Nehmen Sie nun an, die stationären Einteilchenzustände $\phi_n(\vec{x})$ von $\hat{H} = H(\hat{x}, \hat{p})$ und deren Energien E_n seien Ihnen bekannt. Konstruieren Sie daraus die Wellenfunktionen

a) $\psi^{(u)}_{n_1,n_2}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ für zwei unterscheidbare Teilchen, wobei sich das erste Teilchen im Einteilchenzustand n_1 und das zweite im Einteilchenzustand n_2 befinde,

b) $\psi^{(b)}_{n_1,n_2}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ für zwei Bosonen in den Zuständen n_1 und n_2,

c) $\psi^{(f)}_{n_1,n_2}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ für zwei Fermionen in den Zuständen n_1 und n_2,

für $n_1 \neq n_2$.

Wie groß sind die Energien der jeweiligen Zweiteilchenzustände? Schreiben Sie Ausdrücke für den Erwartungswert

$$\langle (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2 \rangle$$

für jeden der Zweiteilchenzustände, so dass Sie diese nach ihrer Größe ordnen können. Welche Teilchen sind also im Mittel am nähsten beieinander und welche Teilchen sind im Mittel am weitesten voneinander entfernt?

2 Identische Teilchen im harmonischen Oszillator

Zwei identische Teilchen mit Spin 1/2 sollen sich zunächst wechselwirkungsfrei in einem eindimensionalen Potential $V(q) = \frac{m\omega^2}{2} q^2$ aufhalten.

a) Formulieren Sie den Hamiltonoperator des Zweiteilchensystems. Begründen Sie, dass die Eigenenergiezustände in einen Orts- und einen Spinanteil separieren. Wie lauten die möglichen Eigenzustände für den Spinanteil?

Bitte Rückseite nicht übersehen.

Wir betrachten nun die Energieeigenzustände $|\Psi\rangle = |\Psi\rangle_{\text{spin}} \otimes |\Psi\rangle_{\text{ort}}$ des Zweiteilchensystems mit Spinanteilen

$$|\Psi\rangle_{\text{spin}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(| + -\rangle - | - +\rangle \right) .$$

b) Welche Symmetrie muss der Ortsanteil besitzen?

c) Wie lautet der Grundzustand des Gesamtsystems und welche Energie besitzt dieser Zustand?[1] Gleiche Frage für den ersten angeregten Zustand.

Wir schalten nun eine Wechselwirkung $V(q_1 - q_2) = V_0 e^{-\kappa(q_1-q_2)^2}$ ein, mit $\kappa > 0$.

d) Berechnen Sie in erster Ordnung Störungstheorie die Energieänderung der Zustände aus Teilaufgabe (c).

Hinweis: Setzen Sie $k = \frac{\hbar\kappa}{m\omega}$, benutzen Sie die explizite Form der Wellenfunktionen des harmonischen Oszillators und verwenden Sie (ohne Beweis) die Formel

$$\frac{1}{\pi} \int dx_1 dx_2 e^{-x_1^2 - x_2^2 - k(x_1-x_2)^2 + \alpha x_1 + \beta x_2} = \frac{1}{\sqrt{1+2k}} e^{\frac{1}{4(1+2k)}\left((1+k)\alpha^2 + (1+k)\beta^2 + 2k\alpha\beta\right)} .$$

e) Was ändert sich für den Fall $|\Psi\rangle_{\text{spin}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(| + -\rangle + | - +\rangle \right)$? (Keine Rechnung)

[1] *Erinnerung:* Aus der QM1 ist bekannt, dass

$$\psi_n(x) = \left(\frac{mw}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi) e^{-\xi^2/2} ,$$

mit $\xi = x\sqrt{mw/\hbar}$ die Gleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{mw^2}{2} x^2 \right) \psi_n(x) = E_n \psi_n(x)$$

löst, mit $E_n = \hbar w(n + \frac{1}{2})\, , n = 0, 1, 2, \ldots$. Die ersten Hermite-Polynome sind gegeben durch

$$H_0(\xi) = 1 \, , \quad H_1(\xi) = 2\xi \, , \qquad H_2(\xi) = (2\xi)^2 - 2 \, .$$