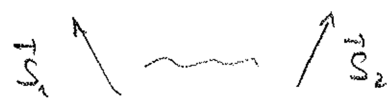
IV.6 Quantenrealität – Das EPR Paradoxon

Thomas Klose

(klassische Realität $\hat{=}$ physikalische Phänomene werden durch reale physikalische Objekte bewirkt, die unabhängig von deren Beobachtung existieren.)

Zur Erinnerung: Verschränkung

Das Zwei-Spin System



(wechselwirkend oder auch nicht)

mit Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 = \mathrm{span}\{|{+}{+}\rangle, |{+}{-}\rangle, |{-}{+}\rangle, |{-}{-}\rangle\}$

sei im Zustand

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|{+}{-}\rangle - |{-}{+}\rangle\big)$$

"Singulett" ($|l,m\rangle$ Notation)

Der erste Spin gehöre Alice ($\equiv A$), der zweite gehöre Bob ($\equiv B$).

FRAGE: In welchem Zustand ist Alices Spin? $|+\rangle$ oder $|-\rangle$ oder $a|+\rangle + b|-\rangle$ oder ...?

ANTW.: Weder noch! Alices Spin ist in einem gemischten Zustand in $\mathcal{H}_1$ $\Rightarrow$ Man kann ihn nicht als $|\psi\rangle$ schreiben, sondern nur als statistischen Operator ($\equiv$ Dichtematrix) $\hat{\rho}$, nämlich

$$\hat{\rho}_A = \frac{1}{2}|+\rangle\langle+| + \frac{1}{2}|-\rangle\langle-|$$

Formal geht das so: Stat. Op. für das Gesamtsystem ist

$$\hat{\rho}_{tot} = |0,0\rangle\langle 0,0| = \frac{1}{2}\Big(|{+}{-}\rangle\langle{+}{-}| + |{-}{+}\rangle\langle{-}{+}| - |{+}{-}\rangle\langle{-}{+}| - |{-}{+}\rangle\langle{+}{-}|\Big)$$

Spurbildung über $\mathcal{H}_2$:

$$\hat{\rho}_A = \mathrm{Sp}_2\, \hat{\rho}_{tot} = \sum_{m=\pm} {}_2\langle m|\hat{\rho}_{tot}|m\rangle_2 = \frac{1}{2}\big(|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|\big) \qquad \square$$

Übrigens, Bobs Spin ist im gleichen Zustand in $\mathcal{H}_2$, da

$$\hat{\varrho}_B = \mathrm{Sp}_1\, \varrho_{tot} = \sum_{m=\pm} {}_1\langle m|\varrho_{tot}|m\rangle_1 = \frac{1}{2}\left(|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|\right) \qquad \square$$

<u>FRAGE:</u> Was ist eigentlich der Unterschied zwischen

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right)$$

und

$$\hat{\varrho} = \frac{1}{2}|+\rangle\langle+| + \frac{1}{2}|-\rangle\langle-| \quad ?$$

In beiden Fällen ist die Wahrscheinlichkeit $S_z = \frac{\hbar}{2}$ oder $S_z = -\frac{\hbar}{2}$ je 50 % !

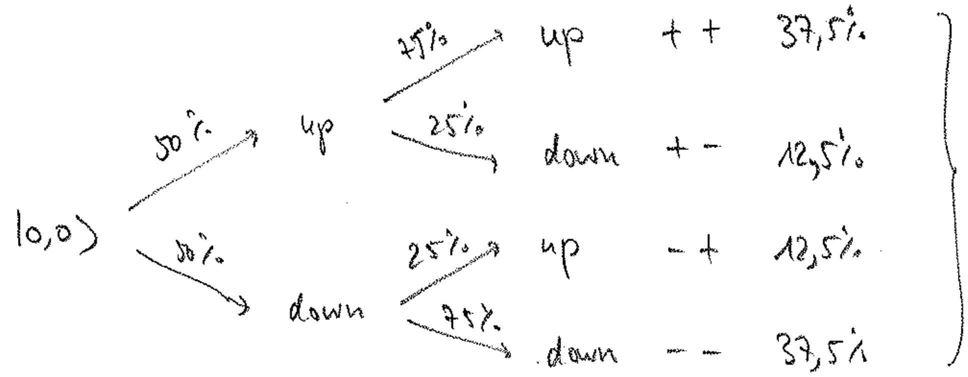
<u>ANTW.:</u> Die Möglichkeit zur Interferenz ist anders. In der Sprache des Doppelspaltexperiments: $|\psi\rangle$ geht durch beide Spalte gleichzeitig. $\hat{\varrho}$ geht in 50% der Fälle durch den einen Spalt und in 50% der Fälle durch den anderen. $|\psi\rangle$ trägt quantenmechanische Unbestimmtheit, $\hat{\varrho}$ klassische.

Zurück zu Alice und Bob: Da das Gesamtsystem in einem reinen, verschränkten Zustand ist, sind die Spins <u>antikorreliert</u>:

	Messung $\hat{S}_{1,z}$		Messung $\hat{S}_{2,z}$	insg.	W
$|0,0\rangle \xrightarrow{50\%}$	up	$\xrightarrow{0\%}$	up	+ +	0 %
		$\xrightarrow{100\%}$	down	+ −	50 %
$|0,0\rangle \xrightarrow{50\%}$	down	$\xrightarrow{100\%}$	up	− +	50 %
		$\xrightarrow{0\%}$	down	− −	0 %

$$\Rightarrow \langle 0,0|\hat{S}_{1z}\hat{S}_{2z}|0,0\rangle = -\frac{\hbar^2}{4}$$

FRAGE: Was muss man machen um folgendes zu bekommen?



$$EW = \frac{\hbar^2}{4}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right) = \frac{\hbar^2}{8}$$

ANTW.: Man muss entlang von Achsen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ messen, die einen Winkel von $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 120°$ einschließen, denn $\cos 120° = -\frac{1}{2}$ und allgemein gilt

$$\langle 0,0|\, \hat{S}_{1,\vec{a}}\, \hat{S}_{2,\vec{b}}\, |0,0\rangle = -\frac{\hbar^2}{4}\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = -\frac{\hbar^2}{4}\,\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$[\ |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = 1\ ]$

FRAGE: Woher weiß der Spin bei Bob eigentlich, was er sein muss nachdem Alice ihre Messung durchgeführt hat?

MÖGL. I: Instantane Kommunikation der Spins?

MÖGL. II: Die beiden Spins haben sich bereits bei ihrer Erzeugung abgesprochen, was sie anzeigen werden, wenn sie irgendwann mal in irgendeine Richtung gemessen werden?

MÖGL. III. Die beiden Spins befinden sich in einem verschränkten Zustand?

I & III ist praktisch das gleiche: Nicht-Lokalität

II ist eine Theorie versteckter Variablen.

Betrachten wir Mögl. II genauer: BELLSCHE UNGLEICHUNG

Die Spins müssen sich bezüglich alle Richtungen absprechen. Hier greifen wir 3 beliebige Richtungen $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ heraus.

Spin Richtung	A $\left[\frac{\hbar}{2}\right]$ $\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{c}$	B $\left[\frac{\hbar}{2}\right]$ $\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{c}$	Korrelation $\left[\frac{\hbar^2}{4}\right]$ $\langle\vec{a}\vec{b}\rangle$	$\langle\vec{a}\vec{c}\rangle$	$\langle\vec{b}\vec{c}\rangle$	Mittelwert $M=\frac{1}{3}(\langle ab\rangle+\langle ac\rangle+\langle bc\rangle)$
	+ + +	− − −	−	−	−	−1
	+ + −	− − +	−	+	+	+1/3
	+ − +	− + −	+	−	+	+1/3
	+ − −	− + +	+	+	−	+1/3
	− + +	+ − −	+	+	−	+1/3
	− + −	+ − +	+	−	+	+1/3
	− − +	+ + −	−	+	+	+1/3
	− − −	+ + +	−	−	−	−1
			EW?			EW $\leq \frac{1}{3}$

Alle Möglichkeiten, wie sich die Spins absprechen könnten. Wir machen keine Annahme über die Wahrscheinlichkeit mit denen sie diese Möglichkeiten wählen.

keine Ahnung, weil wir die relativen Häufigkeiten nicht kennen. Alles was wir sagen können, ist dass der EW zw. $-\frac{\hbar^2}{4}$ und $+\frac{\hbar^2}{4}$ liegen muss

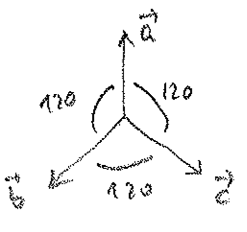
Wir haben gezeigt, dass jede Theorie versteckter Variablen (V.V.) vorhersagt, dass

$$\langle M\rangle_{V.V.} \equiv \frac{1}{3}\left(\langle \hat{S}_{1\vec{a}}\hat{S}_{2\vec{b}}\rangle + \langle \hat{S}_{1\vec{a}}\hat{S}_{2\vec{c}}\rangle + \langle \hat{S}_{1\vec{b}}\hat{S}_{2\vec{c}}\rangle \right) \overset{!}{\leq} \frac{1}{3}\frac{\hbar^2}{4}$$

für beliebige Richtungen $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Die Quantenmechanik sagt vorher, daß $\langle M\rangle_{QM} = -\frac{\hbar^2}{4}\,\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}}{3}$

Nehmen wir z.B.



$\Rightarrow$ alle Skalarprodukte $= -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \langle M\rangle_{QM} = \frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{4} \not\leq \frac{1}{3}\frac{\hbar^2}{4} \quad ↯$$

D.h. die Quantenmechanik kann nicht durch eine Theorie der versteckten Variablen ersetzt (bzw vervollständigt) werden.

Natürlich besteht noch die Möglichkeit, dass die Quantenmechanik einfach falsch ist.

Experiment: Alain Aspect, Philippe Grangier, Gérard Roger
"Experimental Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A violation of Bell's inequality", Phys Rev Lett 49 (2): 91-94 (1982)

⇝ QM ✓
V.V. ×

[siehe auch "Free will theorem"

Fazit: Quantenrealität = Das reine Quantensystem ist fundamental unscharf (d.h. nicht-lokal). Durch Beobachtung wird ein scharfer Zustand erzeugt. Die Beobachtung deckt keinesfalls nur einen schon vor der Messung vorliegenden Zustand auf.

QUANTENINFORMATIK

(auch manchmal: Quanteninformation, Quantencomputing ...)

Kleinste Informationseinheit:

klassischer Computer: Bit $b \in \{0,1\}$

$\rightsquigarrow$ 2 Zustände

Quantencomputer: Qubit $|b\rangle \in \{ c_0|0\rangle + c_1|1\rangle \}$ $c_i \in \mathbb{C}$

$\rightsquigarrow$ ein Kontinuum an Zuständen

[$\binom{c_0}{c_1} \in \mathbb{CP}^1$ = Blochsphäre]

Register:

klass. Computer: N Bits

$$\left.\begin{matrix} 00\ldots00 \\ 00\ldots01 \\ 00\ldots10 \\ \vdots \\ 11\ldots11 \end{matrix}\right\} \text{2^N Zustände kodiert durch N Binärzahlen}$$

Quantencomputer: N Qubits

$$|\psi\rangle = c_{0\ldots00}|0\ldots00\rangle + c_{0\ldots01}|0\ldots01\rangle + \ldots$$

Kontinuum an Zuständen [$\mathbb{CP}^{2^N-1}$] kodiert durch 2^N komplexe Zahlen.

ABER: All diese Zahlen sind nicht gleichzeitig messbar! Nichtsdestotrotz können wir alle während der Rechnung benutzen. Wie dies geht, sehen wir gleich.

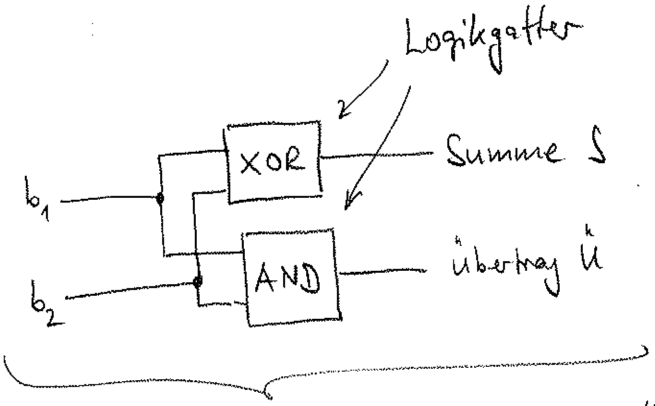
Klassischer Computer

Was machen Computer (außer Emails verschicken)?

* Sie durchlaufen Algorithmen, die zu einer Eingabe eine gewisse Ausgabe liefern.

z.B. Zahlen addieren

b_1	b_2	s	$ü$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1



Logikschaltbild eines "Halb-Addierers"

Quantencomputer

Realisierung von $|0\rangle$ und $|1\rangle$ durch z.B. Spin-$\frac{1}{2}$-Systeme

$$|0\rangle \equiv |\uparrow\rangle \equiv |+\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|1\rangle \equiv |\downarrow\rangle \equiv |-\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Logikgatter durch Zeitentwicklungsoperator

$$\hat{U}(t,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}$$

z.B. $\hat{H} = \frac{e}{mc}\vec{B}\cdot\hat{\vec{S}}$ $\qquad \vec{B} = \text{konst.}$

Sei $\phi := -\frac{e}{mc}|\vec{B}|\,(t-t_0)$, $\quad \vec{n} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$, dann

$$\hat{U} = e^{+i\frac{\phi}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = \mathbb{1}\cdot\cos\frac{\phi}{2} + i\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\,\sin\frac{\phi}{2} \quad \text{(Rotation)}$$

z.B. für $\phi = \pi$ & $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ ergibt sich

$$U = +i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sigma_x + \sigma_z\right) = +\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$i = e^{i\pi/2}$ entfernt. Ändert nichts an Unitarität.

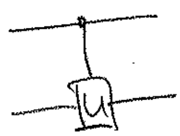
Typische Ein-Qubit-Gatter

* Hadamard (Jacque H. 1865–1963) $\quad H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} \quad -\boxed{H}-$
* NOT $\quad X = \sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad -\boxed{X}-$
* Pauli-y $\quad Y = \sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} \quad -\boxed{Y}-$
* Pauly-z $\quad Z = \sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad -\boxed{Z}-$

etc.

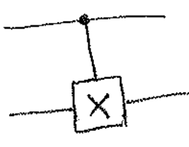
Typische Zwei-Qubit-Gatter

* Kontrolliertes U



$$|0,\phi\rangle \rightarrow |0,\phi\rangle$$
$$|1,\phi\rangle \rightarrow |1,U\phi\rangle$$

* Kontrolliertes NOT



$$|00\rangle \rightarrow |00\rangle$$
$$|01\rangle \rightarrow |01\rangle$$
$$|10\rangle \rightarrow |11\rangle$$
$$|11\rangle \rightarrow |10\rangle$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Alle Quantengatter müssen umkehrbar sein, weil sie durch unitäre Operatoren realisiert werden. (Sonst wären wir wieder zurück beim kl. Computer) $\Rightarrow$ No-Cloning-Theorem