

ÜBUNGSBLATT 4, Abgabe am Di. 15.11.16 bis 15 Uhr,  
Besprechung in den Übungen am Fr. 18.11.16.

**1** **Taylorentwicklung und Differentialgleichungen (18 + 26 = 44 Punkte)**

- a) Gesucht sind alle Funktionen  $f(x)$ , welche die folgende Differentialgleichung

$$f'(x) = (f(x))^2$$

erfüllen. Lösen Sie diese Aufgabe, indem Sie zunächst die Differentialgleichung dazu benutzen, um alle höheren Ableitungen  $f^{(n)}(0)$  mit  $n = 1, 2, 3, \dots$  durch  $f(0)$  auszudrücken. Setzen Sie dann diese Ableitungen in die Taylorentwicklung von  $f(x)$  um  $x_* = 0$  ein und führen Sie die Summe aus.

*Tipp:* Denken Sie an die geometrische Reihe.

- b) Gesucht sind alle Funktionen  $x(t)$ , welche die folgende Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$$

erfüllen. Lösen Sie diese Aufgabe, indem Sie zunächst die Differentialgleichung dazu benutzen, um alle höheren Ableitungen  $x^{(n)}(0)$  mit  $n = 2, 3, 4, \dots$  durch  $x(0)$  und  $\dot{x}(0)$  auszudrücken. Setzen Sie dann diese Ableitungen in die Taylorentwicklung von  $x(t)$  um  $t_* = 0$  ein und führen Sie die Summe aus.

*Tipp:* Erinnern Sie sich an die Taylor-Reihen:

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 \pm \dots \quad , \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \pm \dots$$

Bitte Rückseite nicht übersehen.

## 2 Stammfunktionen raten (6 · 4 = 24 Punkte)

Finden Sie jeweils eine Stammfunktion  $F(x)$  für alle der folgenden Funktionen  $f(x)$ , indem Sie zunächst eine plausible Vermutung aufstellen, diese vermutete Funktion dann ableiten und sie so lange anpassen, bis Sie bei der korrekten Funktion herauskommen.

a)  $f(x) = \cos(3x)$

b)  $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

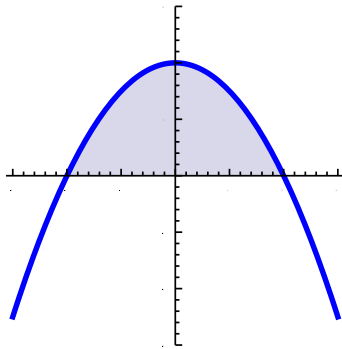
c)  $f(x) = 4e^{-x/3}$

d)  $f(x) = a^x$

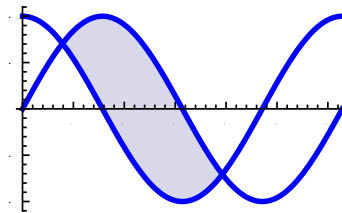
e)  $f(x) = e^{x^2} x$

f)  $f(x) = \sin^2(x) \cos(x)$

## 3 Flächenberechnung (12 + 20 = 32 Punkte)



a)



b)

- a) Berechnen Sie die schattierte Fläche unterhalb des Graphen der Funktion  $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2$  zwischen den Nullstellen.
- b) Berechnen Sie die schattierte Fläche zwischen den Graphen von  $\sin x$  und  $\cos x$ .  
*Hinweis:* Es gilt  $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .