Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Physik
Burkhard Eden, Jordi Kling, Thomas Klose,
Felix Paul, Wadim Wormsbecher

Pk4 Mathematische Grundlagen WS 2016/17

Übungsblatt 6, Abgabe am Di. 29.11.16 bis 15 Uhr, Besprechung in den Übungen am Fr. 02.12.16.

1 Potenzen und Logarithmen ($3 + 4 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 32$ Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Potenzen und geben Sie die Ergebnisse entweder in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ *oder* in der Form $re^{i\varphi}$ mit $r, \varphi \in \mathbb{R}$ sowie $r \geq 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ an.

a) $i^{123456789}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{123456789} i^k$ c) $(1+i)^{1002}$ d) $\frac{1}{\sqrt[3]{i}}$

e) i^i f) $\ln(2+3i)$ g) $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{i}\right)$

Hinweis: Berücksichtigen Sie die Mehrwertigkeit von Potenzen mit gebrochenen bzw. komplexen Exponenten und von Logarithmen.

2 Komplexe Gleichungen ($6 \cdot 8 = 48$ Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen.

a) $z^4 + 81i = 0$

b) $z = 1 + i - \frac{i}{z}$

c) $z^4 - iz^2 + 2 = 0$

Bestimmen Sie die Lösungsmengen für $z \in \mathbb{C}$ für die folgenden Gleichungen. Stellen Sie die Lösungsmengen in der komplexen Zahlenebene grafisch dar.

d) $\mathrm{Re}(z^2) + i\,\mathrm{Im}\big(\bar{z}(1+2i)\big) = -3$

e) $\mathrm{Im}\big((2-i)z\big) = 1$

f) $\mathrm{Re}\big(z(1+i)\big) + z\bar{z} = 0$

3 Euler und de Moivre ($5 + 15 = 20$ Punkte)

a) Benutzen Sie die de Moivre-Formel, um $\sin(4\alpha)$ durch $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ auszudrücken.

b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int e^{(1+i)x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Benutzen Sie, dass der Real- und Imaginärteil eines Integrals gleich dem Integral über den Real- bzw. den Imaginärteil des Integranden ist, um aus Ihrem Ergebnis für obiges Integral, Ausdrücke für

$$\int e^x \cos x\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int e^x \sin x\,\mathrm{d}x$$

herzuleiten. Überprüfen Sie diese Ausdrücke durch Ableiten auf ihre Richtigkeit.