Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Physik
Burkhard Eden, Jordi Kling, Thomas Klose,
Felix Paul, Wadim Wormsbecher

Pk4 Mathematische Grundlagen WS 2016/17

Übungsblatt 9, Abgabe am Di. 03.01.17 bis 15 Uhr, Besprechung in den Übungen am Fr. 06.01.17.

1 Viskose Reibung (20 Punkte)

Eine Kugel der Masse m falle in einer ölgefüllten Säule aufgrund der Schwerkraft nach unten. Die viskose Reibung ist proportional zur Geschwindigkeit, so dass die Differentialgleichung, welche die Geschwindigkeit $v(t)$ als Funktion der Zeit während des Falls beschreibt,

$$m\dot{v}(t) = mg - bv(t)$$

lautet. Lösen Sie diese Differentialgleichung für $v(t)$ unter der Bedingung, dass die Anfangsgeschwindigkeit $v(t) = v_0$ beträgt. Welche Geschwindigkeit v_∞ ergibt sich für $t \to \infty$? Hängt v_∞ von v_0 ab und falls ja, wie ist die Abhängigkeit? Skizzieren Sie den qualitativen Verlauf von $v(t)$ jeweils für $v_0 < \frac{mg}{b}$ und für $v_0 > \frac{mg}{b}$.

2 DGL mit variablen Koeffizienten (25 + 40 = 65 Punkte)

Berechnen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen.

a) $xy'(x) + 4y(x) = 3x^2$

b) $x^4 y^{(4)}(x) + 6x^3 y'''(x) - 2xy'(x) + 20y = 0$

Bitte Rückseite nicht übersehen.

3 Gedämpfte und erzwungene Schwingung (15 Punkte)

Eine Masse $m = 2\,\mathrm{kg}$ an einer Feder mit Federkonstanten $k = 3\,\mathrm{N/m}$ und Dämpfungskonstanten $b = 1\,\mathrm{kg/s}$ wird mit der Frequenz $\Omega = 2\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ zum Schwingen angeregt. Die Bewegung wird durch die Gleichung

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = F\cos(\Omega t)$$

beschrieben, wobei F ein Maß für die Amplitude der Anregung ist.
Berechnen Sie in $\frac{1}{\mathrm{s}}$:

a) die Frequenz ω_0, mit der das frei schwingende ($F = 0$), ungedämpfte ($b = 0$) Federpendel schwingt,

b) die Frequenz ω, mit der das frei schwingende ($F = 0$), gedämpfte Federpendel schwingt,

c) die Frequenz $\tilde{\Omega}_0$, mit der das angetriebene, ungedämpfte ($b = 0$) Federpendel schwingt,

d) die Frequenz $\tilde{\Omega}$, mit der das angetriebene, gedämpfte Federpendel schwingt,

e) die Frequenz Ω_{max}, mit der man das Pendel anregen muss, um die maximale Schwindungsamplitude zu erreichen.

Ordnen Sie diese Frequenzen ω_0, ω, Ω_{max} entsprechend ihrer Größe.

Hinweis: Diese Aufgabe ist kürzer als sie aussieht. Sie brauchen keine Herleitungen angeben, sondern können sich alle benötigten Formeln aus dem Skript zusammensuchen.