Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Physik
Burkhard Eden, Jordi Kling, Thomas Klose,
Felix Paul, Wadim Wormsbecher

Pk4 Mathematische Grundlagen WS 2016/17

Übungsblatt 11, Abgabe am Di. 17.01.17 bis 15 Uhr,
Besprechung in den Übungen am Fr. 20.01.17.

1 Lineare Abbildungen in zwei Dimensionen ($6 \cdot 8 = 48$ Punkte)

Im Folgenden werden Abbildungen in Worten beschrieben. Geben Sie jeweils die zugehörigen Matrizen an. Berechnen und skizzieren Sie dann für jede der Abbildungen das Abbild des Vierecks mit den Eckpunkten $(1;1)$, $(-1;1)$, $(-1;-1)$, $(1;-1)$. Hat sich die Form des Vierecks durch die Abbildung geändert? Um welchen Faktor hat sich sein Flächeninhalt verändert?

a) Der Punkt $(1;0)$ soll auf den Punkt $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ abgebildet und der Punkt $(0;1)$ soll auf den Punkt $(-\frac{1}{2};1)$ abgebildet werden.

b) Die x-Achse soll um den Faktor 2 gestreckt und die y-Achse um den Faktor 2 gestaucht werden.

c) Alle Vektoren sollen um den Winkel $45°$ im Uhrzeigersinn gedreht werden.

d) Die x-Achse soll auf die Diagonale von links unten nach rechts oben ohne Verzerrung (d.h. keine Streckung oder Stauchung) abgebildet werden. Vektoren entlang der y-Achse sollen um den Faktor $\sqrt{2}$ gestreckt werden aber ihre Richtung behalten.

e) Alle Vektoren sollen an der Achse durch die Punkte $(0;0)$ und $(1;2)$ gespiegelt werden.

f) Alle Vektoren sollen zunächst an der y-Achse gespiegelt und dann um den Faktor 2 gestreckt werden.

Bitte Rückseite nicht übersehen.

2 Drehungen (12 Punkte)

Die Drehmatrix

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

rotiert alle Vektoren um den Winkel α. Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt zweier Vektoren sich unter dieser Abbildung nicht verändert, d.h. zeigen Sie, dass

$$\vec{a}' \cdot \vec{b}' = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

für jedes Paar von Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und deren Abbilder $\vec{a}' = \underline{A}\vec{a}$ und $\vec{b}' = \underline{A}\vec{b}$ gilt.

3 Matrizen und Determinanten ($5 \cdot 8 = 40$ Punkte)

a) Berechnen Sie für die Matrizen $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ und $\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ die Produkte $\underline{AB}$ und $\underline{BA}$. Stimmen die Ergebnisse überein?

b) Berechnen Sie die Matrix $\underline{X}$ mit

$$\underline{X} = \underline{B}(\underline{A} - 3\,\mathbb{1})^{-1}\,, \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\,, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}\,.$$

c) Beweisen oder widerlegen Sie: "Für eine invertierbare Matrix $\underline{A}$ sind die Matrizen $\underline{A}^n$ mit $n = 2{,}3{,}4, \ldots$ ebenfalls invertierbar."

d) Zeigen Sie, dass $\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ invertierbar ist und berechnen Sie $\underline{A}^{-1}$.

e) Unter welcher Bedingung für a und b existiert $(\mathbb{1} - \underline{A})^{-1}$, wobei

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1-a-b & 0 & 0 \\ a & 1-a-b & 0 \\ 0 & a & 1-a-b \end{pmatrix}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$? Berechnen Sie unter dieser Bedingung $(\mathbb{1} - \underline{A})^{-1}$.