Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Physik
José Enrique Alvarez Roca, Marius Bothe,
Thomas Klose, Jonas Marschner, Julian Miczajka

Pk4 Mathematische Grundlagen WS 2017/18

Übungsblatt 2, Abgabe am Do. 02.11.17 bis 15 Uhr,
Besprechung in den Übungen am Fr. 03.11.17.

1 **Reihen (20 Punkte)**

Die Explosion einer Atombombe läuft im Prinzip folgendermaßen ab: Ein Neutron spaltet einen Plutoniumkern, wobei drei freie Neutronen entstehen. Dies ist die 1. Zerfallsstufe. Jedes dieser drei Neutronen spaltet in der 2. Zerfallsstufe dann einen weiteren Kern und es bleiben insgesamt neun freie Neutronen zurück. Dieser Vorgang setzt sich solange fort, bis alle Plutoniumkerne zerfallen sind. Wie lange dauert der vollständige Zerfall eines Plutoniumstücks mit N Kernen, wenn τ die Dauer einer Zerfallsstufe ist? Bestimmen Sie zunächst eine allgemeine Formel und werten Sie diese dann für die beispielhaften Zahlenwerte $N = 7{,}85 \cdot 10^{26}$ und $\tau = 10^{-8}$s aus.

2 **Logarithmen (6·2+8=20 Punkte)**

Berechnen bzw. vereinfachen Sie.

a) $\log_3 243$ b) $\log_{\sqrt{5}} 25$ c) $\log_a \sqrt[5]{a^2}$

Lösen Sie.

d) $10^{x-1} = 6$ e) $(7^{2x-1})^2 = 36$ f) $\sqrt{2^{3x}} \cdot \sqrt[3]{5^{2x}} = 1$

g) Der radioaktive Zerfall eines Elements verläuft nach dem Gesetz $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, wobei N_0 die Menge zur Zeit $t = 0$ und $N(t)$ die Menge zur Zeit t sind. Die sogenannte Zerfallskonstante λ gibt Auskunft über die Schnelligkeit des Zerfalls. Berechnen Sie die Halbswertszeit τ des Elements in Abhängigkeit von der Zerfallskonstanten. Das ist die Zeit, zu der $N(t = \tau)$ gerade halb so groß ist wie N_0.

3 Tangens und Cotangens (20 Punkte)

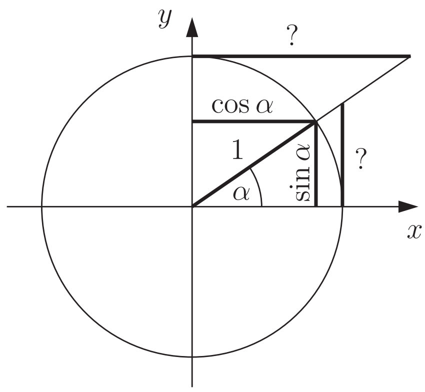
Zeigen Sie, dass die Längen der beiden mit Fragezeichen gekennzeichneten Strecken am Einheitskreis durch

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{bzw.} \quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

gegeben sind. (Welche ist welche?)

Tipp: Strahlensatz

Benutzen Sie dieses geometrische Verständnis, um den Verlauf der Funktionsgraphen von $\tan\alpha$ und $\cot\alpha$ für $\alpha \in [0; 2\pi]$ zu skizzieren.



4 Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen (4+4+12=20 Punkte)

Unter Verwendung der aus der Vorlesung bekannten Additionstheoreme

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad , \quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \ ,$$

leiten Sie Additionstheoreme für

a) $\sin(\alpha - \beta)$ b) $\cos(\alpha - \beta)$ c) $\tan(\alpha \pm \beta)$

her.

5 Hyperbolische Funktionen (20 Punkte)

Finden Sie die beiden Lösungen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ der Gleichung

$$2\cosh(2x) - \sinh(2x) = 2 \ .$$

Tipp: Drücken Sie die hyperbolischen Funktionen durch Exponentialfunktionen aus und betrachten Sie $y = e^{2x}$ als Variable. Nachdem Sie die Gleichung für y gelöst haben, finden Sie die zugehörigen Werte für x.