Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Physik
José Enrique Alvarez Roca, Marius Bothe,
Thomas Klose, Jonas Marschner, Julian Miczajka

Pk4 Mathematische Grundlagen WS 2017/18

Übungsblatt 4, Abgabe am Di. 14.11.17 bis 15 Uhr,
Besprechung in den Übungen am Fr. 17.11.17.

1 Taylorentwicklung (2 + 5 + 8 + 10 + 10 + 15 = 50 Punkte)

Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in eine Taylorreihe.

a) $f(x) = x^2$ um $x_* = 0$

b) $f(x) = x^2$ um $x_* = 1$
und skizzieren Sie die Funktionsgraphen jedes einzelnen Terms in der Taylorentwicklung sowie den Funktionsgraphen von $f(x)$

c) $f(x) = \sqrt{1+x}$ um $x_* = 0$ bis zur dritten Ordnung,
d.h. alle Terme proportional zu x^n mit $n = 0,1,2,3$

d) $\ln(x)$ um $x_* = 1$

e) $\ln(1+x)$ um $x_* = 0$

f) $f(v) = mc^2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)$ um $v_* = 0$ bis zur Ordnung v^4

Diese Funktion ist die kinetische Energie eines Teilchens mit der Geschwindigkeit v und Masse m gemäß der speziellen Relativitätstheorie. (Die Konstante c ist die Lichtgeschwindigkeit.) Mit diesem Hinweis, erkennen Sie den Term der Ordnung v^2 wieder?

Tipp: Statt direkt drauflos zu rechnen, können Sie auch versuchen herauszufinden, wie man die Ergebnisse aus c) hier verwenden könnte.

Bitte Rückseite nicht übersehen.

2 Taylorentwicklung und Differentialgleichungen (20 + 30 = 50 Punkte)

a) Gesucht sind alle Funktionen $f(x)$, welche die folgende Differentialgleichung

$$f'(x) = \big(f(x)\big)^2$$

erfüllen. Lösen Sie diese Aufgabe, indem Sie zunächst die Differentialgleichung dazu benutzen, um alle höheren Ableitungen $f^{(n)}(0)$ mit $n = 1,2,3,\ldots$ durch $f(0)$ auszudrücken. Setzen Sie dann diese Ableitungen in die Taylorentwicklung von $f(x)$ um $x_* = 0$ ein und führen Sie die Summe aus.

Tipp: Denken Sie an die geometrische Reihe.

b) Gesucht sind alle Funktionen $x(t)$, welche die folgende Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$$

erfüllen. Lösen Sie diese Aufgabe, indem Sie zunächst die Differentialgleichung dazu benutzen, um alle höheren Ableitungen $x^{(n)}(0)$ mit $n = 2,3,4,\ldots$ durch $x(0)$ und $\dot{x}(0)$ auszudrücken. Setzen Sie dann diese Ableitungen in die Taylorentwicklung von $x(t)$ um $t_* = 0$ ein und führen Sie die Summe aus.

Tipp: Erinnern Sie sich an die Taylor-Reihen:

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 \pm \ldots \quad , \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \pm \ldots$$