Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Physik
José Enrique Alvarez Roca, Marius Bothe,
Thomas Klose, Jonas Marschner, Julian Miczajka

Pk4 Mathematische Grundlagen WS 2017/18

Übungsblatt 6, Abgabe am Di. 28.11.17 bis 15 Uhr, Besprechung in den Übungen am Fr. 01.12.17.

1 Integration ($15 \cdot 4 = 60$ Punkte)

Berechnen Sie die folgenden bestimmten und unbestimmten Integrale.

a) $\int (x+1)\, e^x \, \mathrm{d}x$ b) $\int x\, e^{-x} \, \mathrm{d}x$ c) $\int \cot x \, \mathrm{d}x$

d) $\int \sqrt{2-3x} \, \mathrm{d}x$ e) $\int_0^{\pi/3} \sin(2x-\pi) \, \mathrm{d}x$ f) $\int_0^{\pi} x \sin(3x) \, \mathrm{d}x$

g) $\int \ln \sqrt{x} \, \mathrm{d}x$ h) $\int_1^2 x^2 \ln x \, \mathrm{d}x$ i) $\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x$

j) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$ k) $\int \frac{\sin x}{1-\cos x} \, \mathrm{d}x$ l) $\int \frac{x}{a^2+x^2} \, \mathrm{d}x$

m) $\int \frac{x^2}{(2+x^3)^3} \, \mathrm{d}x$ n) $\int_0^1 2x^3 e^{x^2} \, \mathrm{d}x$ o) $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \, \mathrm{d}x$

Hinweis: Denken Sie an partielle Integration, Substitution oder beides. Eventuell müssen Sie auch mehrfach partiell integrieren oder substituieren.

Bitte Rückseite nicht übersehen.

2 Separierbare Differentialgleichungen (4 + 20 + 4 = 28 Punkte)

Gegeben sind die folgenden vier Differentialgleichungen 1. Ordnung:

(i) $y'(x) = \left(\frac{y(x)}{x}\right)^2$ (ii) $y'(x) = x + y(x)$

(iii) $\dot{x}(t) = \frac{3t^2}{e^{x(t)}}$ (iv) $f'(x) = f(x)^2 x - x^2 f(x)$

a) Welche der obigen Differentialgleichungen sind (durch Umstellen der Gleichungen) separierbar?

b) Berechnen Sie für alle separierbaren Differentialgleichungen die allgemeinen Lösungen.

c) Bestimmen Sie aus den allgemeinen Lösungen die speziellen Lösungen, die durch den Punkt (1,1) gehen.

3 Ulimantulus Irrichmich (11 + 1 = 12 Punkte)

Sie finden (schon wieder) einen Zettel auf dem Boden des Hörsaals. Diesmal steht dort:

Gesucht ist das Integral $I = \int 2 \sin x \cos x \, dx$. Es bieten sich zwei Möglichkeiten für die Substitution an.

a) $g(x) = \sin x$, $\frac{dg}{dx} \overset{(1)}{=} \cos x \Rightarrow dx = \frac{dg}{\cos x}$

$$\Rightarrow I \overset{(2)}{=} \int 2 g \cdot dg \overset{(3)}{=} 2 \cdot \frac{1}{2} g^2 \overset{(4)}{=} \sin^2 x$$

b) $g(x) = \cos x$, $\frac{dg}{dx} \overset{(5)}{=} -\sin x \Rightarrow dx = -\frac{dg}{\sin x}$

$$\Rightarrow I \overset{(6)}{=} -\int 2g \cdot dg \overset{(7)}{=} -2 \cdot \frac{1}{2} g^2 \overset{(8)}{=} -\cos^2 x$$

Weil wir in beiden Fällen dasselbe Integral berechnen gilt

$$\overset{(9)}{\Rightarrow} \sin^2 x = -\cos^2 x \overset{(10)}{\Rightarrow} \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{\overset{(11)}{=} 1} = 0 \Rightarrow 1 = 0$$

Erklären Sie in kurzen Stichworten, was in den Schritten (1) bis (11) gemacht wurde. Wo liegt der Fehler, der zu dem augenscheinlichen Widerspruch $1 = 0$ führte?