Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Physik
José Enrique Alvarez Roca, Marius Bothe,
Thomas Klose, Jonas Marschner, Julian Miczajka

Pk4 Mathematische Grundlagen WS 2017/18

---

# Übungsblatt 7, Abgabe am Di. 05.12.17 bis 15 Uhr, Besprechung in den Übungen am Fr. 08.12.17.

## 1 Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen ($8 \cdot 5 = 40$ Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Potenzen und Wurzeln und schreiben Sie die Ergebnisse entweder in der Form $a + \mathrm{i}b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ *oder* in der Form $re^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $r, \varphi \in \mathbb{R}$ sowie $r \geq 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$. Beachten Sie die Mehrwertigkeit der komplexen Wurzel und geben Sie *alle* Werte an.

a) $\mathrm{i}^{123456789}$

b) $\sum_{k=1}^{123456789} \mathrm{i}^k$

c) $(1+\mathrm{i})^{1002}$

d) $\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k/n}$ wobei $n \in \mathbb{N}$

e) $\sqrt[4]{1}$

f) $\sqrt[2]{\mathrm{i}}$

g) $\sqrt[6]{-\mathrm{i}}$

h) $\frac{1}{\sqrt[3]{1+\mathrm{i}}}$

## 2 Komplexe Gleichungen ($6 \cdot 8 = 48$ Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen.

a) $z^4 + 81\mathrm{i} = 0$

b) $z = 1 + \mathrm{i} - \frac{\mathrm{i}}{z}$

c) $z^4 - \mathrm{i}z^2 + 2 = 0$

Bestimmen Sie die Lösungsmengen für $z \in \mathbb{C}$ für die folgenden Gleichungen. Stellen Sie die Lösungsmengen in der komplexen Zahlenebene grafisch dar.

d) $\mathrm{Re}(z^2) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\big(\bar{z}(1+2\mathrm{i})\big) = -3$

e) $\mathrm{Im}\big((2-\mathrm{i})z\big) = 1$

f) $\mathrm{Re}\big(z(1+\mathrm{i})\big) + z\bar{z} = 0$

## 3 Euler-Formel (4 + 8 = 12 Punkte)

a) Unter Verwendung der Euler-Formel, beweisen Sie

$$\left(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi\right)^n = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi\ .$$

b) Betrachten Sie die obige Gleichung für $n = 5$ und leiten Sie daraus zwei trigonometrische Identitäten der Form

$$\cos 5\varphi = \dots \qquad\qquad \sin 5\varphi = \dots$$

her, wobei auf den rechten Seiten nur die Funktionen $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ des einfachen Winkels stehen sollen.