Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Physik
José Enrique Alvarez Roca, Marius Bothe,
Thomas Klose, Jonas Marschner, Julian Miczajka

PK4 MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN WS 2017/18

ÜBUNGSBLATT 9, Abgabe am Di. 19.12.17 bis 15 Uhr, Besprechung in den Übungen am Fr. 22.12.17.

1 Lineare Differentialgleichungen ($3 \cdot 10 = 30$ Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen indem Sie die Nullstellen der zugehörigen charakteristischen Polynome berechnen. Überprüfen Sie anschließend die Richtigkeit ihrer Lösungen durch Einsetzen in die Differentialgleichungen.

a) $y'''(x) + 3y''(x) = 4y(x)$

b) $y''(x) = 6\mathrm{i}y'(x) + 9y(x)$

c) $y^{(4)}(x) + 2y''(x) + y(x) = 0$

2 Lineare Differentialgleichungen mit Inhomogenitäten ($5 \cdot 8 = 40$ Punkte)

Berechnen Sie eine Partikulärlösung für jede der folgenden Differentialgleichungen indem Sie jeweils einen sinnvollen Ansatz für $y(x)$ machen und die Konstanten des Ansatzes bestimmen.

a) $y'''(x) + 3y''(x) - 4y(x) = -4\mathrm{e}^{-x}$

b) $y''(x) - 4y(x) = 6\mathrm{e}^{x} + 5\sin x$

c) $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \cos x$

Konstruieren Sie jeweils eine lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten, welche die folgenden allgemeinen Lösungen besitzen.

d) $y(x) = Ae^{3x} + 3e^{5x}$ mit beliebigem konstanten A

e) $y(x) = 3e^{3x} + Ae^{5x}$ mit beliebigem konstanten A

Bitte Rückseite nicht übersehen.

3 Gedämpfte Schwingung ($3 \cdot 10 = 30$ Punkte)

Die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

beschreibt die Auslenkung $x(t)$ eines Federpendels aus der Ruhelage mit Eigenfrequenz ω_0 und Dämpfungskonstanten γ.

a) Für den Fall, dass $\omega_0 = 5\frac{1}{\mathrm{s}}$ und $\gamma = 4\frac{1}{\mathrm{s}}$, finden Sie zunächst die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. Bestimmen Sie dann die spezielle Lösung für die Situation, dass die Feder zur Zeit $t = 0$ bei einer Auslenkung von 6cm aus der Ruhe losgelassen wird. Skizzieren Sie grob die Funktion $x(t)$.

b) Ein gedämpftes Federpendel führe eine Bewegung gemäß

$$x(t) = 2\mathrm{cm}\, e^{-\frac{6}{\mathrm{s}}t} \cos(\tfrac{8}{\mathrm{s}}t)$$

aus. Wie groß sind die Eigenfrequenz ω_0 und die Dämpfungskonstante γ für dieses Pendel? Mit welcher Geschwindigkeit wurde das Federpendel zur Zeit $t = 0$ angestoßen?

c) Wie groß müssen die Eigenfrequenz ω_0 und die Dämpfungskonstante γ sein, damit die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung die Form

$$x(t) = (A + Bt)\, e^{-\frac{2}{\mathrm{s}}t}$$

mit beliebigen Konstanten A und B hat? Drücken Sie diese Konstanten durch die Anfangsposition x_0 und die Anfangsgeschwindigkeit v_0 aus. Wie schnell muss man das Federpendel in Richtung der Ruhelage mindestens anschupsen, so dass das Pendel es trotz der großen Dämpfung noch einmal schafft, die Ruhelage zu passieren?

Hinweis: Die mathematische Formulierung der letzten Teilfrage lautet: Für welche v_0 hat die Funktion $x(t)$ bei vorgegebenem x_0 eine Nullstelle für $t > 0$.