Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Physik
José Enrique Alvarez Roca, Marius Bothe,
Thomas Klose, Jonas Marschner, Julian Miczajka

Pk4 Mathematische Grundlagen WS 2017/18

Übungsblatt 11, Abgabe am Di. 16.01.18 bis 15 Uhr, Besprechung in den Übungen am Fr. 19.01.18.

1 Vektorrechnung ($7 \cdot 4 = 28$ Punkte)

Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

a) das Skalarproduct $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$,

b) das Vektorproduct $(\vec{a} - \vec{b}) \times \vec{c}$,

c) die Länge von $\vec{a}$,

d) einen Vektor in Richtung von $\vec{b}$ mit Länge 1,

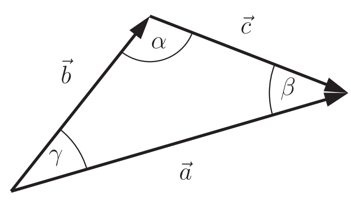
e) den Winkel zwischen $\vec{a} + \vec{c}$ und $\vec{b} + \vec{c}$,

f) die Fläche des Parallelogramms, das von $\vec{a}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird,

g) das Volumen des Parallelepipeds, das von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird.

2 Trigonometrie ($12 + 12 = 24$ Punkte)

Ein allgemeines Dreieck habe die Kanten $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ wie nebenstehend dargestellt. Die Kantenlängen sind $a = |\vec{a}|$ etc.



a) Beweisen Sie den Sinus-Satz

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

indem Sie die Fläche des Dreiecks auf zwei verschiedene Arten mittels Vektorprodukt ausdrücken.
Hinweis: Sie brauchen nur die erste Gleichheit in obiger Formel zu zeigen, denn die zweite Gleichheit folgt dann durch entsprechendes Umbenennen.

b) Beweisen Sie den Kosinus-Satz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

indem Sie das Skalarprodukt beider Seiten der Gleichung $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ mit sich selbst berechnen (anders ausgedrückt: quadrieren Sie beide Seiten).

3 Mehrfachprodukte (15 + 15 = 30 Punkte)

Die Identitäten

a) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b})$

b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})\,(\vec{b} \cdot \vec{c})$

gelten für beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$. Berechnen Sie jeweils die linke und die rechte Seite dieser Identitäten für die folgenden Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

um sich zu überzeugen, dass die Identitäten zumindest in diesem Fall korrekt sind.

4 Zerlegung eines Vektors (18 Punkte)

Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie zwei Vektoren $\vec{a}_\parallel$ und $\vec{a}_\perp$ mit den Eigenschaften:

- $\vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp = \vec{a}$,
- $\vec{a}_\parallel$ ist parallel zu $\vec{b}$,
- $\vec{a}_\perp$ ist senkrecht zu $\vec{b}$.