Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Physik
José Enrique Alvarez Roca, Marius Bothe,
Thomas Klose, Jonas Marschner, Julian Miczajka

Pk4 Mathematische Grundlagen WS 2017/18

Übungsblatt 12, Abgabe am Di. 23.01.18 bis 15 Uhr,
Besprechung in den Übungen am Fr. 26.01.18.

1 Lineare Abbildungen in zwei Dimensionen ($6 \cdot 12 = 72$ Punkte)

Im Folgenden werden Abbildungen in Worten beschrieben. Geben Sie jeweils die zugehörigen Matrizen an. Berechnen und skizzieren Sie dann für jede der Abbildungen das Abbild des Vierecks mit den Eckpunkten $(1;1)$, $(-1;1)$, $(-1;-1)$, $(1;-1)$. Hat sich die Form des Vierecks durch die Abbildung geändert? Um welchen Faktor hat sich sein Flächeninhalt verändert?

a) Der Punkt $(1;0)$ soll auf den Punkt $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ abgebildet und der Punkt $(0;1)$ soll auf den Punkt $(-\frac{1}{2};1)$ abgebildet werden.

b) Die x-Achse soll um den Faktor 2 gestreckt und die y-Achse um den Faktor 2 gestaucht werden.

c) Alle Vektoren sollen um den Winkel $45°$ im Uhrzeigersinn gedreht werden.

d) Die x-Achse soll auf die Diagonale von links unten nach rechts oben ohne Verzerrung (d.h. keine Streckung oder Stauchung) abgebildet werden. Vektoren entlang der y-Achse sollen um den Faktor $\sqrt{2}$ gestreckt werden aber ihre Richtung behalten.

e) Alle Vektoren sollen an der Achse durch die Punkte $(0;0)$ und $(1;2)$ gespiegelt werden.

   Tipp: Die Parallel-Orthogonal-Zerlegung vom letzten Übungsblatt ist hier hilfreich, denn Vektoren parallel zur Spiegelachse bleiben unverändert, während Vektoren senkrecht zur Spiegelachse ihre Orientierung umkehren.

f) Alle Vektoren sollen zunächst an der y-Achse gespiegelt und dann um den Faktor 2 gestreckt werden.

Bitte Rückseite nicht übersehen.

2 Matrixmultiplikation (5 + 5 = 10 Punkte)

a) Berechnen Sie für die Matrizen $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ und $\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ die Produkte $\underline{AB}$ und $\underline{BA}$. Stimmen die Ergebnisse überein?

b) Die Drehmatrix

$$\underline{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

rotiert alle Vektoren der x-y-Ebene um den Winkel α. Rechnen Sie nach, dass eine Rotation um den Winkel α gefolgt von einer Rotation um den Winkel β dasselbe ist, wie eine Rotation um den Winkel $\alpha + \beta$.

Bem.: In der Klausur wären die relevanten Additionstheoreme angegeben ;-)

3 Determinanten (9 + 9 = 18 Punkte)

a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

auf die folgenden drei verschiedenen Arten und zeigen Sie, dass alle Ergebnisse übereinstimmen.

(i) Regel von Sarrus

(ii) Entwicklung nach einer Zeile Ihrer Wahl

(iii) Entwicklung nach einer Spalte Ihrer Wahl

b) Berechnen Sie durch geschickte, wiederholte Anwendung des Entwicklungssatzes die Determinante der Matrix

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 88 & 790 & 0 & 1 & 49 & 1 & 0 \\ 0 & 13 & 1 & 0 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 120 & 0 & 0 & 18 & -1 & 44 \\ 0 & 33 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 12 & 7 & -18 & 1 & 130 & 6 & -13 & 99 \\ 17 & 19 & -120 & 0 & 17 & 900 & 17 & 2 \\ 0 & -8 & 20 & 0 & -1 & -10 & 1 & -123 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Falls Sie Zahlen größer als 2 miteinander multiplizieren müssen, dann gibt es eine geschicktere Entwicklung.