Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Physik
José Enrique Alvarez Roca, Marius Bothe,
Thomas Klose, Jonas Marschner, Julian Miczajka

PK4 MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN WS 2017/18

ÜBUNGSBLATT 13, Abgabe am Di. 30.01.18 bis 15 Uhr, Besprechung in den Übungen am Fr. 02.02.18.

1 Inverse Matrix (8 + 8 + 4 = 20 Punkte)

a) Invertieren Sie die Matrix

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der "Unterdeterminanten-Formel" aus der Vorlesung.

b) Die obige Matrix $\underline{A}$ (sowie jede andere) kann auch mit Hilfe des Gauß-Algorithmus invertiert werden. Dazu schreibt man die "3-fach erweiterte Koeffizientenmatrix" mit der Einheitsmatrix auf der rechten Seite auf:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Nun bringt man durch elementare Zeilenumformungen die linke Seite in die Form der Einheitsmatrix. Was auch immer dabei auf der rechten Seite entsteht, ist die inverse Matrix $\underline{A}^{-1}$. Führen Sie diese Rechnung durch und vergleichen Sie mit a).

c) Erklären Sie kurz, warum das Verfahren in Aufgabenteil b) funktioniert.

Tipp: Falls es hilft, denken Sie an $\underline{U}\,\underline{A} = \underline{\mathbb{1}}$ und $\underline{U}\,\underline{\mathbb{1}} = \underline{A}^{-1}$.

2 Lineare Gleichungssysteme (10 + 10 + 15 + 15 = 50 Punkte)

Stellen Sie für die folgenden Aufgaben jeweils ein lineares Gleichungssystem der Form $\underline{A}\vec{x} = \vec{b}$ auf und lösen Sie es mittels Gauß-Algorithmus.

a) Gesucht sind Zahlen a, b und c, die den folgenden Gleichungen genügen:

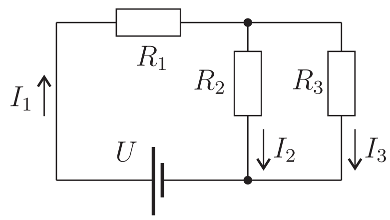
$$a + b + 2c = 3\,, \quad 2a - b + 3c = 5\,, \quad 3a + 4b + 5c = 4\,.$$

b) Ein Behälter hat ein Volumen von 700 l und zwei Zuleitungen unterschiedlicher Größe. Er kann unter gleichzeitiger Verwendung beider Zuleitungen in 5 min befüllt werden. Alternativ kann er vollständig befüllt werden, in dem man zunächst die erste Zuleitung für 3 min und dann die zweite Zuleitung für 6,5 min öffnet. Wie viel Liter fließen durch jede Zuleitung pro Minute?

c) Anselm, Bertram und Cäsar spielen mit Murmeln. Anselm sagt zu Bertram: Gib mir 5 Murmeln, so habe ich doppelt so viele wie dir verbleiben. Bertram sagt zu Cäsar: Gib mir 13 Murmeln, so habe ich dreimal so viele wie dir verbleiben. Cäsar sagt zu Anselm: Gib mir 3 Murmeln, so habe ich sechsmal so viele wie dir verbleiben. Wie viele Murmeln hat jeder?

d) Die abgebildete elektrische Schaltung besteht aus einer Spannungsquelle mit der Spannung U und drei Widerständen der Stärke R_1, R_2 und R_3. Die Kirchhoffschen Regeln besagen für diesen Schaltkreis:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_3 \\ I_1 R_1 + I_3 R_3 &= U \\ I_2 R_2 &= I_3 R_3 \end{aligned}$$



Berechnen Sie die elektrischen Ströme I_1, I_2 und I_3 durch die Widerstände (ausgedrückt durch die Spannung und die Widerstandswerte).

3 Uneindeutig bestimmte lineare Gleichungssysteme (10 + 10 + 10 = 30 Punkte)

a) Für welche Werte von $m \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 2 \end{pmatrix}$$

für x und y, (i) keine, (ii) genau eine, (iii) unendlich viele Lösungen?

Hinweis: Sie brauchen die Lösungsmengen *nicht* zu berechnen.

Berechnen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungssysteme und die Ränge der zugehörigen Abbildungen.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix}$