Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Physik
José Enrique Alvarez Roca, Marius Bothe,
Thomas Klose, Jonas Marschner, Julian Miczajka

Pk4 Mathematische Grundlagen WS 2017/18

Übungsblatt 14, Abgabe am Di. 06.02.18 bis 15 Uhr,
Besprechung in den Übungen am Fr. 09.02.18.

1 Eigenwertprobleme (10 + 10 + 15 + 20 = 55 Punkte)

a) Bestimmen Sie a, b und c aus der letzte Zeile der Matrix

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

so, dass sich die Eigenwerte 1, 2 und 3 ergeben.

Berechnen Sie die Eigenvektoren und Eigenwerte der folgenden Matrizen. Es reicht pro Richtung einen beliebigen Eigenvektor Ihrer Wahl anzugeben.

b) $\begin{pmatrix} 13 & -4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

2 Parameterdarstellung von Kurven ($3 \cdot 8 = 24$ Punkte)

a) Die vier Abschnitte einer Kurve sind jeweils mit Hilfe von $u \in [0,1]$ parametrisiert:

$$\vec{r}_1(u) = \begin{pmatrix} u \\ u + \sqrt{1-u^2} \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}_2(u) = \begin{pmatrix} u \\ u - \sqrt{1-u^2} \end{pmatrix},$$
$$\vec{r}_3(u) = \begin{pmatrix} -u \\ u + \sqrt{1-u^2} \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}_4(u) = \begin{pmatrix} -u \\ u - \sqrt{1-u^2} \end{pmatrix}.$$

Zeichnen Sie den qualitativen Verlauf dieser Kurve.
Tipp: Überlegen Sie sich zuerst wie die Kurve aussehen würde, falls die Wurzeln abwesend wären bzw. falls es nur die Wurzeln in den y-Komponenten gäbe.

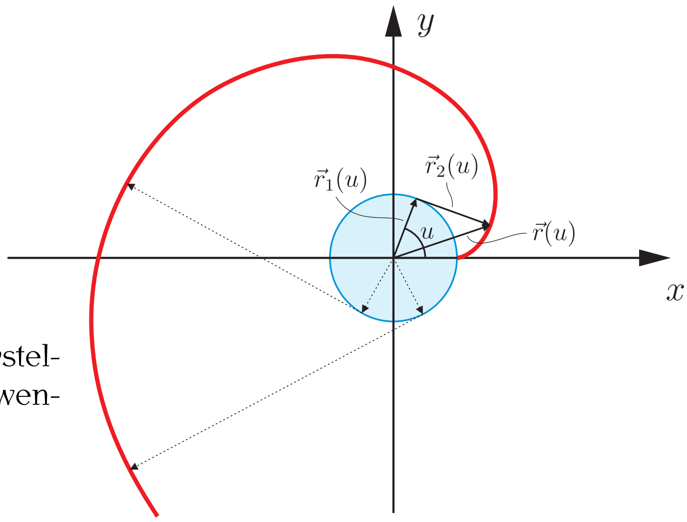
b) Skizzieren Sie die Kurve mit der folgenden Parameterdarstellung für $u \in [0{,}2\pi]$.

$$\vec{r}(u) = \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin u \\ \cos u \end{pmatrix}$$

c) Finden Sie eine Parametrisierung eines Kreises in der Ebene mit Mittelpunkt (x_0, y_0) und Radius R.

3 Evolvente ($4 + 4 + 8 + 4 + 1 = 21$ Punkte)

Gesucht ist die Parameterdartellung der Kreisevolvente mit Radius R. Dies ist die Kurve $\vec{r}(u) = \vec{r}_1(u) + \vec{r}_2(u)$ in der nebenstehenden Abbildung, die dadurch entsteht, dass man einen Faden unter Spannung von einer Rolle mit Radius R abwickelt. Berechnen Sie die Kurve in den folgenden Schritten.



a) Bestimmen Sie die Parameterdarstellung $\vec{r}_1(u)$ eines Kreises unter Verwendung des Winkels u zur x-Achse.

b) Berechnen Sie die Tangente $\vec{f}(u)$.

c) Berechnen Sie die Bogenlänge $s(u)$ entlang des Kreises von der x-Achse bis zum Winkel u. Dies ist die Länge des abgewickelten Fadens.

d) Bauen Sie aus den obigen Ergebnissen den Vektor $\vec{r}_2(u)$ zusammen, der tangential an dem Kreis anliegt und die Länge $s(u)$ besitzt.

e) Prüfen Sie, dass Sie als Summe aus $\vec{r}_1(u)$ und $\vec{r}_2(u)$ die Kreisevolvente

$$\vec{r}(u) = R \begin{pmatrix} \cos u + u \sin u \\ \sin u - u \cos u \end{pmatrix}$$

gefunden haben.