Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Physik
José Enrique Alvarez Roca, Marius Bothe,
Thomas Klose, Jonas Marschner, Julian Miczajka

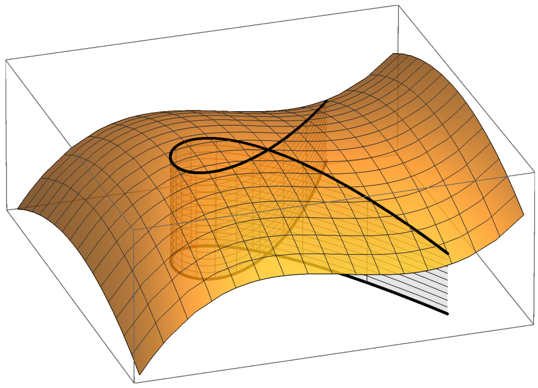
PK4 MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN WS 2017/18

ÜBUNGSBLATT 15, Abgabe am Di. 13.02.18 bis 15 Uhr,
Besprechung in den Übungen am Fr. 16.02.18.

1 **Gebirgswanderung ($6 \cdot 5 = 30$ Punkte)**

Gegeben ist ein Gebirge mit dem Höhenprofil

$$\phi(\vec{r}) = \phi(x,y) = 2x^3 - x^2 - 3x - 2y^2 + 10\ .$$



Der Wanderweg (projiziert in die x-y-Ebene) führt entlang der Kurve

$$\vec{r}(u) = \begin{pmatrix} u^2 - 1 \\ u^3 - u \end{pmatrix}$$

mit $u = [-2{,}2]$.

a) Berechnen Sie das Gradientenfeld von $\phi(\vec{r})$.

b) Berechnen Sie den Tangentenvektor $\vec{f}(u)$ an die Kurve.

c) Setzen Sie aus den beiden vorangehenden Resultaten die Richtungsableitung $\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial\vec{n}}$ mit $\vec{n} = \vec{f}(u)$ entlang der gesamten Kurve zusammen.

d) Bilden Sie die Funktion $\psi(u) = \phi(\vec{r}(u))$ durch Einsetzen der Kurve in das Profil und berechnen Sie deren u-Ableitung. Verleichen Sie das Ergebnis mit dem aus c).

e) Wie viele Anstiege müssen Sie auf Ihrer Wanderung überwinden? (D.h. auf wie vielen zusammenhängenden Abschnitten gewinnen Sie an Höhe?)

f) Bei einer Rast am Mittelpunkt der Reise — bei $u = 0$ — wollen Sie ins Tal schauen. In welche Richtung ist an diesem Ort das Gefälle des Gebirges am steilsten?

Bitte Rückseite nicht übersehen.

2 Doppelintegral ($5 + 25 + 20 = 50$ Punkte)

Gesucht ist das Integral

$$\int_M xy \, \mathrm{d}a$$

für das Gebiet M in der x-y-Ebene, welches

- nach unten durch die x-Achse: $y \geq 0$
- nach links oben durch eine Parabel: $y \leq x^2$
- nach rechts oben durch einen Kreis: $x^2 + y^2 \leq 2$

begrenzt ist.

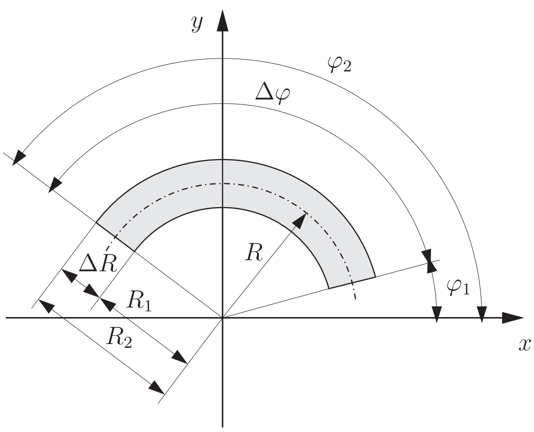
a) Skizzieren Sie das Integrationsgebiet in der x-y-Ebene.

b) Berechnen Sie das Integral auf zwei verschiedene Weisen

(i) Zuerst für festes x über y und anschließend über x integrieren.
Tipp: Sie müssen das x-Intervall zerteilen.

(ii) Zuerst für festes y über x und anschließend über y integrieren.

3 Kreisringsektor (20 Punkte)



Berechnen Sie den Flächeninhalt

$$A = \int_M \mathrm{d}a$$

des gezeichneten Kreisringsektors mit Hilfe eines Doppelintegrals in Polarkoordinaten. Drücken Sie den Flächeninhalt durch $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, den mittleren Radius R und die Breite ΔR aus.