

ÜBUNGSBLATT 2, Abgabe am Do. 30.10.14,  
Besprechung in den Übungen am Fr. 31.10.14.

1 Produktregel für Gradient und Rotation (4 Punkte)

- (a) Leiten Sie eine Produktregel für  $\nabla(f(\mathbf{r})g(\mathbf{r}))$  her.
- (b) Leiten Sie eine Produktregel für  $\nabla \times (f(\mathbf{r})\mathbf{A}(\mathbf{r}))$  her.

*Tipp:* Benutzen Sie in der Herleitung die Darstellung von  $\nabla$  in kartesischen Koordinaten und schreiben Sie Ihr Ergebnis in Vektornotation. Damit haben Sie dann gezeigt, dass Ihre Identität allgemein gültig ist.

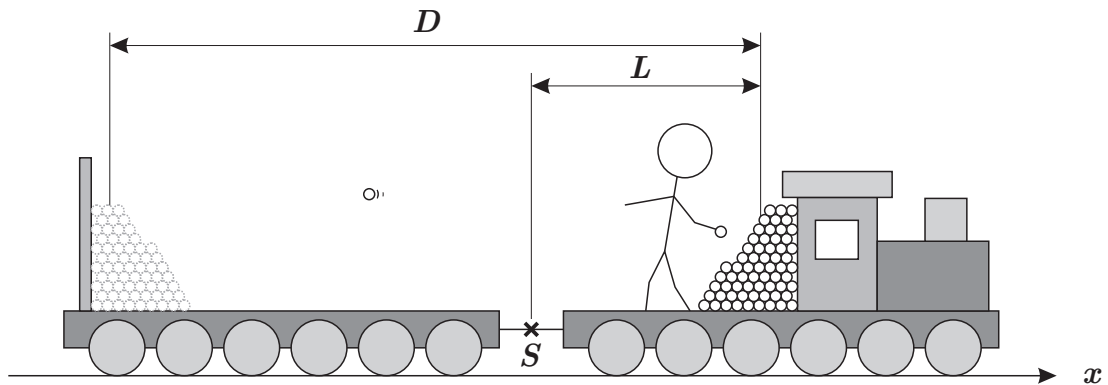
2 Satz von Stokes (8 Punkte)

Gegeben ist das Vektorfeld  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (2x - y)\mathbf{e}_x - yz^2\mathbf{e}_y - y^2z\mathbf{e}_z$ . Berechnen Sie zur Vorbereitung  $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r})$ , sowie die unbestimmten Integrale  $\int \sin^2(x) dx$  und  $\int \sin(x) \cos(x) dx$ .

- (a) Berechnen Sie das Wegintegral  $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  entlang des Einheitskreises in der  $z = 0$  Ebene.
- (b) Berechnen Sie das Flächenintegral  $\iint_{S_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} da$  über den Einheitskreis in der  $z = 0$  Ebene.
- (c) Berechnen Sie das Flächenintegral  $\iint_{S_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} da$  über den Teil der Einheitskugel mit  $z \geq 0$ .
- (d) Vergleichen Sie die Ergebnisse in (a), (b) und (c). Wie muss der Umlaufsinn des Wegintegrals und die Orientierung der Flächennormalen  $\mathbf{n}$  zusammenhängen, damit der Satz von Stokes gilt?

Bitte Rückseite nicht übersehen.

### 3 Zugantrieb (8 Punkte)



Ein Zug besteht aus einer Lokomotive und einem Waggon. Der Zug hat die Masse  $M$  und sein Schwerpunkt ist durch den Punkt  $S$  im obigen Bild markiert. Auf der Lokomotive befinden sich  $N$  Kohlebriketts der Masse  $m$ . Die Masse der Briketts ist *nicht* in  $M$  enthalten. Der Schwerpunkt der Briketts befindet sich im Abstand  $L$  vom Schwerpunkt des Zuges. Der Lokführer ist masselos. Der Zug kann reibungsfrei über die Schienen rollen.

Anstatt die Briketts zu verfeuern, wirft der Lokführer sie einzeln mit der Geschwindigkeit  $v_0$  relativ zum Boden nach hinten und treibt durch den Rückstoßeffekt den zu Beginn stehenden Zug an.

- Welche Geschwindigkeit bekommt der Zug, wenn ein Brikett abgeworfen wurde?
- Die Briketts landen am Ende des Waggon und haben eine Strecke  $D$  relativ zum Zug zurückgelegt. Wie weit ist der Zug in dieser Zeit gefahren?
- Welche Geschwindigkeit hat der Zug, nachdem das Brikett im Waggon gelandet ist?
- Wie weit ist der Zug gefahren, nachdem alle Briketts geworfen wurden?
- Vergleichen Sie die Position des Schwerpunkts des Gesamtsystems am Anfang und am Ende.
- Vergleichen Sie die gesamte kinetische Energie des System am Anfang, während ein Brikett durch die Luft fliegt und am Ende. Erklären Sie warum die Energie erhalten oder nicht erhalten ist.