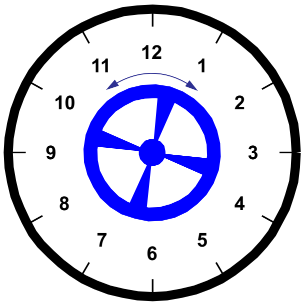
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
PD Dr. T. Klose, Dr. F. Loebbert, B.Sc. J. Miczajka, B.Sc. A. Spiering

PK5 KLASSISCHE THEORETISCHE PHYSIK WS 2014/15

ÜBUNGSBLATT 6, Abgabe am Do. 27.11.14, Besprechung in den Übungen am Fr. 28.11.14.

1 Taschenuhr (6 Punkte)



Eine mechanische Uhr wird durch ein kleines Schwungrad, die sogenannte Unruh, angetrieben. Die Unruh schwingt aufgrund einer Torsionsfederanordnung mit Federkonstante κ, welche auf die Unruh ein Drehmoment ausübt, das proportional zum Winkel der Verdrehung der Unruh relativ zum Uhrengehäuse ist. Wir nehmen an, dass in unserer Uhr der Schwerpunkt der Unruh und der Schwerpunkt des Rests der Uhr auf der Drehachse liegen. Bezüglich dieser Achse bezeichnen I_1 bzw. I_2 die Trägheitsmomente der Unruh bzw. des Rests der Uhr. Liegt die Uhr *in Ruhe* auf einer horizontalen, rauen Unterlage, dann führt die Unruh harmonische Schwingungen mit der Periodendauer T aus. Berechnen Sie die Schwingungsperiode für den Fall, dass die Uhr auf einer horizontalen, *absolut reibungsfreien* Unterlage liegt. Geht die Uhr auf dieser Unterlage schneller, langsamer oder genauso schnell wie auf der rauen? (Testen Sie Ihre physikalische Intuition, indem Sie zuerst einmal das Ergebnis raten!)

Hinweis: Wenn Sie zur Gleichung des harmonischen Oszillators $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ gelangt sind, dann dürfen Sie die Kreisfrequenz ω einfach ablesen.

2 Erhaltungsgröße im homogenen Gravitationsfeld (5 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m könne sich nur entlang der Vertikalen (z-Achse) bewegen. Auf das Teilchen wirkt die Gravitationskraft mg in Richtung der negativen z-Achse. Stellen Sie die Lagrangefunktion dieses Systems auf.

(a) Leiten Sie aus der Transformation $z(t) \to z(t,\varepsilon) = z - \varepsilon t$ eine Erhaltungsgröße J her. Wie würden Sie diese Transformation bezeichnen?

(b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen aus der Lagrangefunktion her. Berechnen Sie $\dot{J}$ und zeigen Sie, dass diese Ableitung verschwindet, wenn die Bewegungsgleichung erfüllt ist.

Bitte Rückseite nicht übersehen.

3 Runge-Lenz-Vektor (9 Punkte)

Ein Planet der Masse m im Gravitationsfeld der Sonne wird durch die Lagrangefunktion

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{k}{|\mathbf{r}|}$$

beschrieben, wobei die Masse der Sonne und die Newtonsche Gravitationskonstante in die Konstante k eingehen. Zeigen Sie, dass für die Transformation

$$\mathbf{r}(t) \to \mathbf{r}(t, \varepsilon) = \mathbf{r} + 2\varepsilon(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\dot{\mathbf{r}} - \varepsilon(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} - \varepsilon\mathbf{n}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})$$

mit konstantem Vektor $\mathbf{n}$, folgendes für die Änderung der Lagrangefunktion gilt:

$$\left.\frac{dL(\mathbf{r}(t, \varepsilon), \dot{\mathbf{r}}(t, \varepsilon))}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{n} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) + k\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\right) .$$

Hier ist $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\,\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ der Drehimpulsvektor. Berechnen Sie die zugehörige Erhaltungsgröße J. Was können Sie aus der Beliebigkeit von $\mathbf{n}$ schließen?

Hinweis: Diese Aufgabe ist eine sehr gute Übung in der Vektorrechnung. Die Antisymmetrie des Vektorprodukts $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, die Zyklizität des Spatprodukts $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ und die "Baccab-Regel" $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ sind Ihre Freunde!