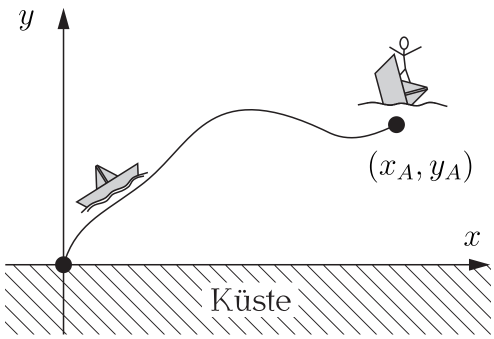
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
PD Dr. T. Klose, Dr. F. Loebbert, B.Sc. J. Miczajka, B.Sc. A. Spiering

PK5 KLASSISCHE THEORETISCHE PHYSIK WS 2014/15

ÜBUNGSBLATT 7, Abgabe am Do. 04.12.14, Besprechung in den Übungen am Fr. 05.12.14.

1 Seenotrettung (6 Punkte)

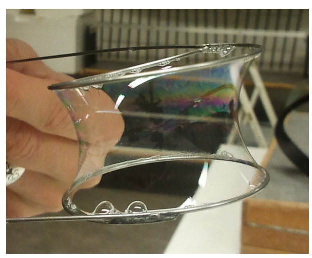


Sie befinden sich mit Ihrem Rettungsboot im Ursprung des eingezeichneten Koordinatensystems und müssen so schnell wie möglich zur Unglücksstelle am Ort mit den Koordinaten (x_A, y_A) fahren. Der Betrag der Geschwindigkeit, die Sie mit Ihrem Rettungsboot höchstens fahren können ist proportional zum Abstand des Rettungsbootes von der Küste[1] und gegeben durch die Formel $v = ay$, wobei a eine Konstante mit der Einheit $1/\mathrm{s}$ ist. Sie wollen entlang einer Route fahren, die sich als Funktion $y = y(x)$ darstellen lässt (d.h. Sie vermeiden Schlenker nach links und rechts). Berechnen Sie die geometrische Form dieser Route.

Hinweis: Je nachdem, wie Sie diese Aufgabe lösen, könnte Ihnen das eine oder andere Integral begegnen:

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{c-\xi}} = -2\sqrt{c-\xi}\,, \quad \int \frac{\xi\, d\xi}{\sqrt{c^2-\xi^2}} = -\sqrt{c^2-\xi^2}\,, \quad \int \sqrt{c^2-\xi^2}\, d\xi = -\frac{3}{2}(c^2-\xi^2)^{\frac{3}{2}}\,.$$

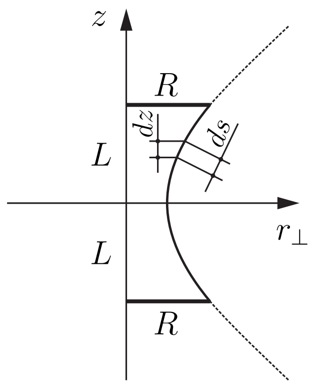
2 Seifenhaut (7 Punkte)



Sie tauchen zwei Ringe in Seifenlauge und ziehen Sie vorsichtig wieder heraus. Zwischen den beiden Ringen hat sich eine Seifenhaut gebildet. In dieser Aufgabe sollen Sie die geometrische Form dieser Seifenhaut für den Fall berechnen, dass die beiden Ringe den Radius R haben und sich parallel zueinander im Abstand $2L$ voneinander befinden—dass sie also die Stirnflächen eines Zylinders bilden, siehe Zeichnung.

[1] Fragen Sie nicht warum—das habe ich mir einfach so ausgedacht.

Gehen Sie wie folgt vor:



(a) Aufgrund der Symmetrie der Anordnung wissen Sie, dass die Seifenhaut eine Rotationsfläche bildet. Das Profil dieser Fläche wird durch die Funktion $r_\perp(z)$ beschrieben. Diese Funktion erfüllt $r_\perp(L) = r_\perp(-L) = R$. Stellen Sie eine Formel für den Flächeninhalt einer solchen Rotationsfläche auf. Ihre Formel sollte ein Integral über z sein.

Tipp: Das Flächenelement ist das Produkt aus dem Wegelement ds und dem Linienelement $d\ell_\varphi$.

(b) Berechnen Sie das Profil, für welches der Flächeninhalt minimal wird. Es reicht, wenn Sie die allgemeine Form des Profils finden, ohne dass Sie sich um die Randbedingungen kümmern.

Hinweis: Ein nützliches Integral lautet

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - c^2}} = \operatorname{arccosh} \frac{\xi}{c} \; .$$

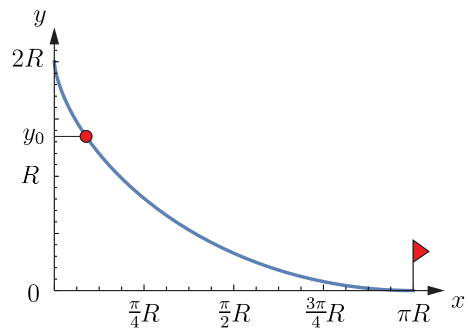
(c) Versuchen Sie nun, die Randbedingungen zu erfüllen. Gibt es für beliebiges R und L eine eindeutige Lösung? Eine qualitative Antwort reicht.

Tipp: Dazu brauchen Sie eventuell einen Funktionenplotter, z.B. den unter `http://www.freetutor.de/plotter.html`. Die Funktion $\cosh x$ und deren Umkehrfunktion $\operatorname{arccosh} x$ gibt man als `cosh(x)` bzw. `acosh(x)` ein.

3 Zykloidenrutsche (7 Punkte)

Die nebenstehende Zykloide hat die Parameterdarstellung

$$\mathbf{r}(\theta) = \begin{pmatrix} R\theta - R\sin\theta \\ R + R\cos\theta \end{pmatrix} ,$$



wobei θ Werte von 0 bis π annimmt. Wenn Sie aus einer gegebenen Höhe $y_0 = R + R\cos\theta_0$ aus der Ruhe losrutschen, wie lange dauert es, bis Sie unten angekommen sind?

Tipp: Wenn Sie die Rutschzeit als ein Integral ausgedrückt haben, könnte es sinnvoll sein, zunächst die Substitution $z = \cos\theta$ durchzuführen und dann so lange zu substituieren, bis Sie das folgende Integral benutzen können:

$$\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi)}} = \pi \; .$$