Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
PD Dr. T. Klose, Dr. F. Loebbert, B.Sc. J. Miczajka, B.Sc. A. Spiering

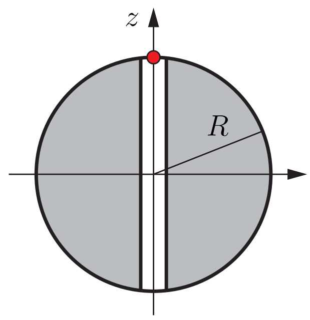
Pk5 Klassische Theoretische Physik WS 2014/15

Übungsblatt 10, Abgabe am Do. 08.01.15,
Besprechung in den Übungen am Fr. 09.01.15.

1 Reise durch eine homogene Kugel (8 Punkte)

(a) Sie haben eine homogen geladene Kugel mit Radius R und Gesamtladung $Q > 0$. Berechnen Sie das Elektrische Feld im gesamten Raum, d.h. sowohl im Inneren der Kugel als auch außerhalb. Skizzieren Sie das Feld in Abhängigkeit vom Radius.

(b) Sie bohren gerade durch den Mittelpunkt der Kugel bis zur anderen Seite, siehe Abbildung. Das Loch sei so schmal, dass wir annehmen können, dass das elektrische Feld immer noch dasselbe wie in (a) ist. Nun lassen Sie eine Testladung mit Masse m und Ladung $q < 0$ direkt über dem Loch los. Welche Art von Bewegung führt die Testladung aus? Wie lange dauert es, bis sie auf der anderen Seite der Kugel erscheint? Geben Sie das Ergebnis als Funktion der angegebenen Größen sowie sonstiger Naturkonstanten an.



(c) Da das Coulombgesetz und das Newtonsche Gravitationsgesetz formal gleich sind, kann man das obige Ergebnis leicht auf den Fall einer idealisierten Erdkugel mit Radius R und homogen verteilter Gesamtmasse M übertragen. Die Rolle der Testmasse übernimmt ein/e Physikstudent/in der Masse m. Übersetzen Sie Ihre gefundenen Gleichungen in den neuen Kontext und geben Sie an, wie lange die Reise bis zur anderen Seite der Erde dauert. Berechnen Sie den Zahlenwert in Minuten.

Bitte Rückseite nicht übersehen.

2 Vektoranalysis (5 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass das Kreuzprodukt $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$ zweier wirbelfreier Vektorfelder $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ quellfrei ist.

(b) Ein starrer Körper rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ um eine Achse durch einen Bezugspunkt, welcher selbst im Raum ruht. Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ der Bahngeschwindigkeiten der Punkte des Körpers quellfrei ist.

(c) Ein Vektorfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ sei *nicht* wirbelfrei, aber es existiere ein skalares Feld $f(\mathbf{r})$, so dass das Produkt von $\mathbf{F}$ mit f wirbelfrei ist. Zeigen Sie, dass $\mathbf{F} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}) = 0$.

(d) Berechnen Sie für Felder der Form $\mathbf{F} = F_x(x, y, z)\mathbf{e}_x$ und $\mathbf{G} = G_x(x, y, z)\mathbf{e}_x$ explizit jeden einzelnen Term der Identität

$$\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{F} + (\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{G} + \mathbf{G} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}) + \mathbf{F} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{G})$$

und überprüfen Sie, dass die Identität in diesem Fall erfüllt ist.

(e) Leiten Sie die Produktregel für den Laplace-Operator wirkend auf zwei Skalarfelder f und g her: $\Delta(fg)$.

3 Dirac Deltafunktion (7 Punkte)

(a) Berechnen Sie $\int_{-1}^{3}(x^2 - 6x + 8)\,\delta(x-2)dx$.

(b) Berechnen Sie $\int_{-1}^{3} f(x)\delta(x^2 - 9)dx$.

(c) Berechnen Sie $\int_{-1}^{3}(x-4)\,\delta(x^2 - 6x + 8)dx$.

(d) Vereinfachen Sie $\delta(x^2 + x - 2)$.

(e) Vereinfachen Sie $\delta(x^2 - a^2)$ für $a > 0$.

(f) Zeigen Sie, dass $\int_0^\infty \delta(\cos \pi x)\, q^x\, dx = \frac{\sqrt{q}}{\pi(1-q)}$ für $0 < q < 1$ gilt.

(g) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}$, mit $n = 1,2,\ldots$, im Sinne der Vorlesung gegen die Dirac Deltafunktion konvergiert.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch!