

ÜBUNGSBLATT 12, Abgabe am Do. 22.01.15,  
Besprechung in den Übungen am Fr. 23.01.15.

1 Multipolmomente (8 Punkte)

(a) Die Multipolmomente  $Q$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $Q_{ij}$  einer Ladungsverteilung  $\rho(\mathbf{r})$  bezüglich eines gegebenen Koordinatensystems seien bekannt. Nun verschieben wir die Ladungsverteilung um den Vektor  $\mathbf{a}$ , so dass die verschobene Ladungsverteilung in diesem Koordinatensystem durch die Funktion  $\rho'(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r} - \mathbf{a})$  gegeben ist. Drücken Sie die Multipolmomente  $Q'$ ,  $\mathbf{p}'$ ,  $Q'_{ij}$  der verschobenen Ladungsverteilung durch die Multipolmomente der ursprünglichen Ladungsverteilung aus. Zeigen Sie, dass

(i)  $Q$  grundsätzlich invariant unter beliebigen Verschiebungen ist,

(ii)  $\mathbf{p}$  invariant unter beliebigen Verschiebungen ist, falls  $Q = 0$ ,

(iii)  $Q_{ij}$  invariant unter beliebigen Verschiebungen ist, falls  $Q = 0$  und  $\mathbf{p} = 0$ .

(b) Gegeben ist die Ladungsverteilung

$$\rho(\mathbf{r}) = Q_0 [\delta^{(3)}(\mathbf{r} + \ell \mathbf{e}_x) - \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \ell \mathbf{e}_y) + \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \ell \mathbf{e}_x)] .$$

Berechnen Sie die ersten drei Multipolmomente und geben Sie die zugehörigen Beiträge zum Potential  $\phi(\mathbf{r})$  für  $|\mathbf{r}| \gg \ell$  an. Wohin müsste der Koordinatenursprung verschoben werden, damit das Dipolmoment verschwindet? Wie groß ist in diesem verschobenen Koordinatensystem das Quadrupolmoment?

Bitte Rückseite nicht übersehen.

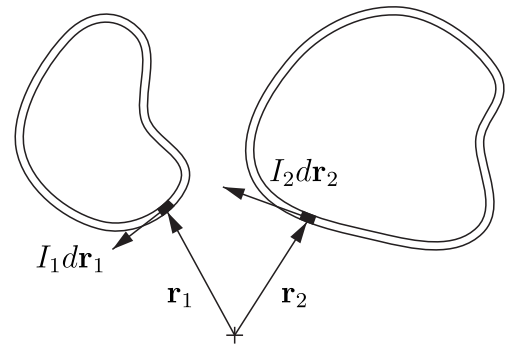
## 2 Drittes Newtonsches Gesetz für magnetische Kräfte (7 Punkte)

Gegeben sind zwei Stromschleifen. Der Beitrag  $d\mathbf{B}(\mathbf{r}_1)$  zum Magnetfeld am Ort  $\mathbf{r}_1$  verursacht durch das Stromelement  $I_2 d\mathbf{r}_2$  der zweiten Stromschleife am Ort  $\mathbf{r}_2$  ist gegeben durch

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\mathbf{r}_2 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}.$$

Der Beitrag zur Gesamtkraft auf die erste Schleife vom Stromelement  $I_1 d\mathbf{r}_1$  am Ort  $\mathbf{r}_1$  ist gegeben durch

$$d\mathbf{F}_{12} = I_1 d\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{B}(\mathbf{r}_1).$$



- Zeigen Sie, dass für bestimmte Orientierungen der Stromelemente  $I_1 d\mathbf{r}_1$  und  $I_2 d\mathbf{r}_2$  der Beitrag  $d\mathbf{F}_{12}$  zur Kraft von 2 auf 1 *nicht* das Negative des Beitrags  $d\mathbf{F}_{21}$  zur Kraft von 1 auf 2 ist, d.h. dass das dritte Newtonsche Gesetz für *einzelne* Stromelemente nicht notwendigerweise erfüllt ist.
- Schreiben Sie das Integral der Beiträge  $d\mathbf{F}_{12}$  und  $d\mathbf{F}_{21}$  über die beiden Stromschleifen auf und zeigen Sie, dass die so ausgedrückten Gesamtkräfte  $\mathbf{F}_{12}$  und  $\mathbf{F}_{21}$  das dritte Newtonsche Gesetz erfüllen.
- Was gilt für die Gesamtkraft einer Stromschleife auf sich selbst?  
*Hinweis:* Sie können unendliche Beiträge ignorieren, die auftreten, wenn  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$  ist.

## 3 Magnetfeld eines unendlichen Drahtes (5 Punkte)

Benutzen Sie das Biot-Savart-Gesetz

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$

um das Magnetfeld eines dünnen, unendlich langen, mit konstanter Stromstärke  $I$  durchflossenen Drahtes zu berechnen.

