Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
PD Dr. T. Klose, Dr. I. Bierenbaum

Pk5 Klassische Theoretische Physik WS 2015/16

Übungsblatt 1, Abgabe am Do. 22.10.15,
Besprechung in den Übungen am Fr. 23.10.15.

1 Vektoranalysis

(a) Ein Teilchen bewegt sich auf einem Kreis mit konstantem Radius R. Der Betrag der Geschwindigkeit ist konstant v_0. Zur Zeit $t = 0$ befindet es sich auf der x-Achse und sein Geschwindigkeitsvektor zeigt in y-Richtung. Geben Sie die Bahnkurve sowohl in der kartesischen Basis sowie in der Polarbasis an. Berechnen Sie durch Ableiten der beiden Darstellungen der Bahnkurve die Beschleunigung $a(t)$ als Funktion der Zeit.

(b) Berechnen Sie $\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r})$ für $\phi(\mathbf{r}) = f(r)$ für eine beliebige Funktion f des Abstands $r = |\mathbf{r}|$ und drei Dimensionen.

(c) Ein Berg hat die Gestalt $h(x, y) = c - ax^2 - by^2$, wobei a, b und c bestimmte Konstanten sind. In welcher Richtung am Punkt $(x, y) = (1{,}1)$ ist der Anstieg am steilsten?

(d) Zeigen Sie, dass *keine* Funktion $V(x, y)$ existiert, um $\mathbf{F} = y \cos x\, \mathbf{e}_x + x \sin y\, \mathbf{e}_y$ als $\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$ zu schreiben.

(e) Wie weit (gemessen entlang einer Geraden vom Start- zum Zielpunkt) bewegt sich ein Teilchen mit der Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}(t) = \left(6\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}t - 3\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}t^2\right)\mathbf{e}_x + \tfrac{4\,\mathrm{m}}{15\,\mathrm{s}^4}t^3\mathbf{e}_y - 2\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\mathbf{e}_z$$

in der Zeit von $t = 1\,\mathrm{s}$ bis $t = 2\,\mathrm{s}$.

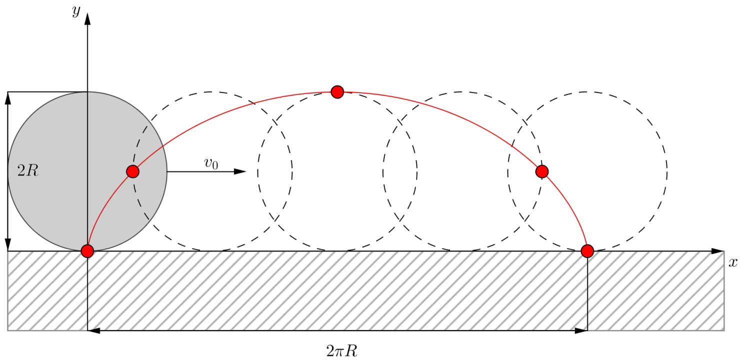
(f) Berechnen Sie die Änderung von $\phi(\mathbf{r}) = x^2yz + 4xz^2$ in Richtung $\Delta\mathbf{r} = \varepsilon\mathbf{n}$ mit $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ bis zur linearen Ordnung in ε.

(g) Berechnen Sie das Wegintegral $\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ über das Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = x\,\mathbf{e}_x + x\,y\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z$ zwischen den Punkten $\mathbf{r}_0 = \mathbf{e}_y$ und $\mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_y + 2\pi\mathbf{e}_z$ entlang des Weges $\mathbf{r}(\lambda) = \sin\lambda\,\mathbf{e}_x + \cos\lambda\,\mathbf{e}_y + \lambda\,\mathbf{e}_z$.

Bitte Rückseite nicht übersehen.

2 Zykloide

Betrachten Sie eine Kreisscheibe mit Radius R, deren Mittelpunkt sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $(0, R)$ auf der y-Achse befindet. Am Berührpunkt $(0, 0)$ der Kreisscheibe mit der x-Achse ist eine Markierung angebracht. Die Scheibe beginnt für $t > 0$ entlang der positiven x-Achse mit einer konstanten Geschwindigkeit $v_0 > 0$ zu rollen, bis die Markierung nach einer ganzen Umdrehung wieder die x-Achse berührt.



(a) Wie lang ist die von der Markierung zurückgelegte Bahn?

(b) Wie hängt das Ergebnis von v_0 ab? Wie ist das zu interpretieren?

3 Abstürzender Satellit

Ein Satellit der Masse m bewege sich unter dem Einfluss der Gravitationskraft

$$\mathbf{F}_{\text{grav}} = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{e}_r$$

und der Reibungskraft

$$\mathbf{F}_{\text{reib}} = -m\gamma(r)\mathbf{v} \ ,$$

wobei r der Abstand des Satelliten zum Erdmittelpunkt, G und M zwei Konstanten (nämlich die Newtonsche Gravitationskonstante und die Masse der Erde) und $\gamma(r)$ eine überall positive Funktion des Abstands sind.

(a) Stellen Sie die vektorielle Bewegungsgleichung auf. Zerlegen Sie diese dann in drei Gleichungen entsprechend der Richtungen $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ und $\mathbf{e}_\varphi$ eines Bezugssystems in Kugelkoordinaten.

(b) Wie müssen $\gamma(r)$ und β gewählt werden, damit

$$r(t) = r_0\,(1-\beta t)^{2/3} \quad , \quad \theta(t) = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \varphi(t) = -\frac{2}{3}\ln\,(1-\beta t) \ ,$$

die Bewegungsgleichungen löst? Welche Form hat die Bahnkurve?

(c) Bestimmen Sie den Betrag der Geschwindigkeit $|\mathbf{v}|$ als Funktion des Abstands r.