Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
PD Dr. T. Klose, Dr. F. Loebbert, B.Sc. J. Miczajka

PK6 QUANTENMECHANIK SS 2015

ÜBUNGSBLATT 3, Abgabe am Mi. 13.05.15 bis 13:00 Uhr per Briefkasten/Email, Besprechung in den Übungen am Fr. 15.05.15.

1 Energiespektrum und Zeitentwicklung (10 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m kann sich frei im Bereich $0 \leq x \leq L$ bewegen.

(a) Lösen Sie die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung im Bereich $0 \leq x \leq L$ unter den Randbedingungen

$$\psi(0) = \psi(L) = 0 \, . \tag{1}$$

Sie brauchen die Lösungen nicht zu normieren. Für welche Werte der Energie finden Sie Lösungen? Gibt es Energien, die entartet sind?

(b) Zur Zeit $t = 0$ sei das System in dem Zustand, der durch die Wellenfunktion

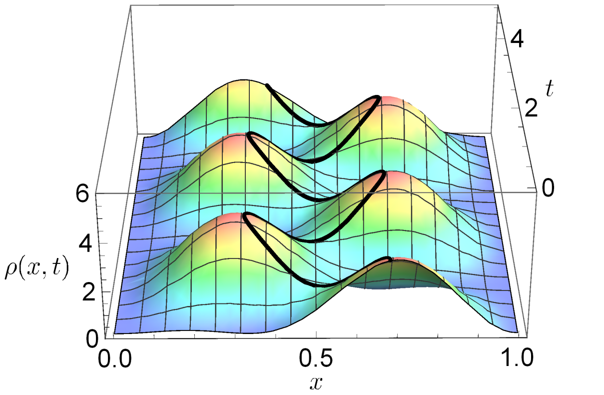
$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\psi_1(x) - \psi_2(x)\big) \tag{2}$$

beschrieben wird, wobei

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi x}{L} \quad , \quad \psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{2\pi x}{L} \tag{3}$$

zwei normierte Lösungen der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung mit den Energien E_1 und $E_2 = 4E_1$ sind. Berechnen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x,t)$ sowie die Erwartungswerte des Ortes $\langle x \rangle(t)$ und des Impulses $\langle p \rangle(t)$ als Funktionen der Zeit.

Bitte Rückseite nicht übersehen.



Plot der Wahrscheinlichkeitsdichte, die Sie in dieser Aufgabe berechnen. Was stellt die schwarze Linie dar?

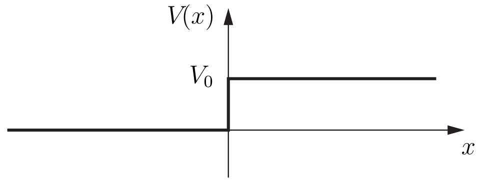
Es gilt für $n = 1{,}2{,}3, \ldots$:

$$\int_0^L x \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L^2}{4},$$
$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0,$$
$$\int_0^L x \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx = -\frac{8L^2}{9\pi^2},$$
$$\int_0^L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx = -\frac{2L}{3\pi},$$
$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \frac{4L}{3\pi}.$$

2 Potentialabhang (5 Punkte)

In der Vorlesung hatten wir gesehen, dass ein von links auf die Potentialstufe

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ V_0 & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \tag{4}$$



einlaufendes Teilchen selbst dann mit einer nicht-verschwindenden Wahrscheinlichkeit reflektiert wird, wenn seine Energie E die Höhe der Potentialstufe übersteigt. In dieser Aufgabe sollen Sie untersuchen, was mit einem von rechts einlaufenden Teilchen passiert. Nehmen Sie an, dass das einlaufende Teilchen die kinetische Energie E_{kin} habe.

(a) Lösen Sie die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung!

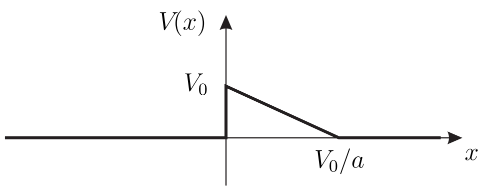
(b) Berechnen Sie den Transmissions- und den Reflexionskoeffizienten!

(c) Was passiert mit diesen Koeffizienten im Fall, dass die kinetische Energie wesentlich größer ist als die Höhe der Stufe, also für $\frac{E_{\text{kin}}}{V_0} \to \infty$?

3 Tunneleffekt (5 Punkte)

Ein Teilchenstrom j_{ein} der Energie E laufe von links auf ein breites Potential der folgenden Form zu:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 - a \cdot x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{V_0}{a} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{5}$$



Berechnen Sie näherungsweise den Anteil des Stromes, der durch die Potentialbarriere tunnelt, wenn $V_0 = 5\,\text{eV}$, $E = 3\,\text{eV}$, $m = 10^{-31}\,\text{kg}$, $a = 3 \cdot 10^9\,\text{eV/m}$.