Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
PD Dr. T. Klose, Dr. F. Loebbert, B.Sc. J. Miczajka

Pk6 Quantenmechanik SS 2015

Übungsblatt 4, Abgabe am Do. 21.05.15 vor der Vorlesung,
Besprechung in den Übungen am Fr. 22.05.15.

1 Fourier-Transformation (7 Punkte)

Es sei bekannt, dass die Wellenfunktion eines Teilchens durch die Amplitudenfunktion

$$A(k) = \begin{cases} \kappa + k & -\kappa < k < 0 \\ \kappa - k & 0 < k < \kappa \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

beschrieben ist. Hierbei sei κ eine reelle, positive Zahl.

(a) Zeichnen Sie $A(k)$.

(b) Berechnen und skizzieren Sie die Wellenfunktion $\Psi(x{,}0)$ zur Zeit $t = 0$.

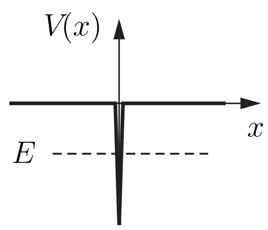
(c) Wie müssen Sie die Amplitudenfunktion ändern, so dass sich das Profil $\Psi(x{,}0)$ um x_0 nach rechts verschiebt, also dass $\Psi_{\text{neu}}(x{,}0) = \Psi(x - x_0{,}0)$?

Tipp: Partielle Integration kann eine nützliche Methode sein.

2 Nadelpotential (6 Punkte)

Gegeben sei ein unendlich tiefer, unendlich dünner Potentialtopf, der mathematisch durch die Diracsche Deltafunktion $\delta(x)$ und einer positiven Konstanten F ausgedrückt werden kann als

$$V(x) = -F\,\delta(x)\ .$$



Dies bedeutet insbesondere, dass das Potential an allen Stellen außer $x = 0$ verschwindet.

umseitig stehen die Fragen

(a) Zeigen Sie, dass die Anschlussbedingungen an der Stelle $x = 0$ gegeben sind durch

$$\lim_{x\to 0^-} \psi(x) = \lim_{x\to 0^+} \psi(x) \;, \qquad \lim_{x\to 0^-} \psi'(x) = \lim_{x\to 0^+} \psi'(x) + \frac{2mF}{\hbar^2}\psi(0) \;.$$

Anleitung: Um die zweite Bedingung herzuleiten, integrieren Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung von $-\varepsilon$ bis ε für beliebiges $\varepsilon > 0$, benutzen Sie die Eigenschaft $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\delta(x)dx = f(0)$ für beliebige Funktionen $f(x)$, und nehmen Sie den Grenzwert $\varepsilon \to 0$.

Hinweis: Die Notation $\lim\limits_{x\to 0^\pm} f(x)$ bedeutet, wie in der Vorlesung, rechts- und linksseitiger Grenzwert, also nichts anderes als $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(\pm\varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$.

(b) Benutzen Sie die obigen Anschlussbedingungen um die Lösungen $\psi(x)$ der zeitunabhängigen Schrödingergleichung mit negativer Energie $E < 0$ zu berechnen. Wie viele Lösungen finden Sie und was sind die zugehörigen Energien?

3 Teilchen auf einem Kreis (7 Punkte)

Untersuchen Sie ein Teilchen mit Masse m, das sich nur auf einem Kreis mit Radius R bewegen kann, aber sonst keine Kräfte spürt. Dies ist also ein eindimensionales System, dessen Zustände durch eine Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ beschrieben werden können. Der Tatsache, dass die Bewegung des Teilchens auf den Kreis beschränkt ist, wird dadurch Rechnung getragen, dass die Wellenfunktion periodisch sein muss: $\Psi(x + 2\pi R, t) = \Psi(x,t)$.

(a) Finden Sie alle Lösungen der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung, die die Periodizitätsbedingung erfüllen.

(b) Tragen Sie die niedrigsten vier erlaubten Energiewerte (qualitativ) auf einer Energieachse grafisch ab. Sind die Energieniveaus entartet? Wie hängt der Abstand benachbarter Energien vom Radius ab? Was passiert im Grenzfall eines unendlich großen Kreises?

(c) Das System werde so präpariert, dass es sich zur Zeit $t = 0$ in einem Zustand befindet, der durch die normierte Wellenfunktion

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sin\frac{2x}{R}$$

beschrieben wird. Geben Sie die Wellenfunktion für einen beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ an.

(d) Wie groß ist der Radius, wenn ein Elektron der Masse $m = 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ auf dem Kreis im ersten angeregten Zustand die Energie $E_1 = 2\,\mathrm{eV}$ besitzt?