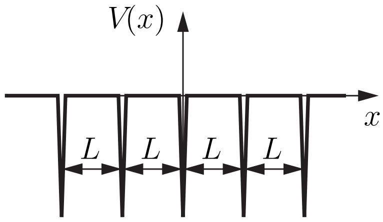
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
PD Dr. T. Klose, Dr. F. Loebbert, B.Sc. J. Miczajka

Pk6 Quantenmechanik SS 2015

Übungsblatt 5, Abgabe am Do. 28.05.15 vor der Vorlesung,
Besprechung in den Übungen am Fr. 29.05.15.

1 Dirac-Kronig-Penney-Modell (12 Punkte)



Gegeben ist das periodische Potential

$$V(x) = -F \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \delta(x - \tau L) ,$$

mit $F > 0$, bestehend aus Diracschen Nadelpotentialen an den Positionen τL für $\tau \in \mathbb{Z}$.

(a) Leiten Sie eine Bedingung der Form $g(\varphi) = f(E)$ her, die das Energiespektrum dieses Systems bestimmt. Hier sind g und f zu bestimmende Funktionen, und φ und E stellen die Bloch-Phase und die Energie dar. Stellen Sie diese Bedingung qualitativ grafisch dar, so dass man die Struktur des Spektrums erkennen kann. Erklären Sie Ihre Grafik.

Tipp: Dazu brauchen Sie eventuell einen Funktionenplotter, z.B. den unter `http://www.freetutor.de/plotter.html`. Die Funktion $\cos x$ oder $\sinh x$ gibt man z.B. als `cos(x)` bzw. `sinh(x)` ein. Die Wurzelfunktion wird durch `sqrt(x)` eingegeben.

(b) Wie verhält sich das Spektrum im Limes $F \to 0$? Was passiert für große Werte von L? Interpretieren Sie diese Spezialfälle.

Tipp: Erinnern Sie sich daran, dass Sie für das Nadelpotential auf Übungsblatt 4 hergeleitet haben, dass die Wellenfunktion an den Stellen τL stetig sein und dass die Ableitung der Wellenfunktion an diesen Stellen einen Sprung der Größe $-\frac{2mF}{\hbar^2}\psi(\tau L)$ machen muss.

Bitte Rückseit nicht übersehen.

2 Halber Oszillator (4 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in dem Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x < 0 \,, \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 & \text{für } x \geq 0 \,. \end{cases} \tag{1}$$

Bestimmen Sie das Energiespektrum mit den zugehörigen Energieeigenfunktionen (= Lösungen der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung).

Tipp: Wie immer dürfen Sie Ergebnisse aus der Vorlesung ohne Herleitung übernehmen.

3 Morse-Oszillator (4 Punkte)

Das Morse-Potential

$$V(r) = V_0 \left[e^{-2\alpha(r-r_0)} - 2e^{-\alpha(r-r_0)} \right] \,, \quad r > 0 \tag{2}$$

mit den Parametern $\alpha > 0$ und $r_0 > 0$ wird häufig benutzt, um das Potential zwischen den Atomen eines zweiatomigen Moleküls zu modellieren. Dieses Zweikörperproblem kann als Einkörperproblem behandelt werden, wenn man die Masse m in der Schrödinger-Gleichung als die reduzierte Masse auffasst.

(a) Skizzieren Sie grob das Potential als Funktion von r.

(b) Nähern Sie das Potential in der Umgebung des Gleichgewichtspunktes durch das Potential eines harmonischen Oszillators an! Drücken Sie die Frequenz des Oszillators durch die Parameter des Potentials und die Masse aus!

(c) Geben Sie das Energiespektrum für nicht zu große Schwingungen an.