Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
PD Dr. T. Klose, Dr. F. Loebbert, B.Sc. J. Miczajka

Pk6 Quantenmechanik SS 2015

Übungsblatt 6, Abgabe am Do. 04.06.15 vor der Vorlesung,
Besprechung in den Übungen am Fr. 05.06.15.

1 Heisenbergsche Unschärferelation (6 Punkte)

In der Vorlesung wurde die Heisenbergsche Unschärferelation für den Spezialfall, dass die Mittelwerte $\langle x\rangle$ und $\langle p\rangle$ verschwinden, hergeleitet. Verallgemeinern Sie nun diesen Beweis auf den Fall, dass diese Mittelwerte beliebig sein dürfen.
Tipp: Betrachten Sie die Hilfsfunktion $\chi(x,t) = \big[(x-\langle x\rangle) + i\lambda(\hat{p}-\langle p\rangle)\big]\Psi(x,t)$.

2 Morse-Oszillator Exakt (9 Punkte)

Berechnen Sie das exakte Spektrum *negativer* Energien für ein Teilchen der Masse m im eindimensionalen Morse-Potential[1]

$$V(x) = V_0\big[e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}\big], \tag{1}$$

wobei $\alpha > 0$ und $V_0 > 0$. Wie hängt dieses exakte Ergebnis mit dem genäherten Ergebnis

$$E_n \approx -V_0 + \sqrt{\frac{2V_0}{m}}\,\hbar\alpha\left(n+\frac{1}{2}\right), \quad n = 0,1,2,\dots$$

von Aufgabe 3 auf Übungsblatt 5 zusammen?
Tipp: Schreiben Sie die eindimensionale, zeitunabhänige Schrödingergleichung in den folgenden Variablen:

$$u = 2c\,e^{-\alpha x}, \qquad b = \frac{\sqrt{-2mE}}{\alpha\hbar}, \qquad c = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\alpha\hbar}. \tag{2}$$

Machen Sie für die Wellenfunktion den Ansatz $\psi(u) = A(u)u^b e^{-u/2}$. Bestimmen Sie die Differentialgleichung, die die Funktion $A(u)$ erfüllen muss und lösen Sie diese mittels Potenzreihenansatz. Lesen Sie aus der Abbruchbedingung das Spektrum ab.

Bitte Rückseite nicht übersehen.

---

[1] Hier ist $x \in \mathbb{R}$ die gewöhnliche Ortskoordinate in einer Dimension.

3 Zustandsdichte des 3D Potentialtopfs (5 Punkte)

Betrachten Sie einen quaderförmigen Potentialtopf mit den Kantenlängen L, $2L$ und $3L$. Im Inneren des Potentialtopfs sei das Potential null und außerhalb unendlich. Geben Sie einen Satz von unabhängigen Lösungen der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung an und berechnen Sie die Zustandsdichte $g(E)$!