Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
PD Dr. T. Klose, Dr. F. Loebbert, B.Sc. J. Miczajka

Pk6 Quantenmechanik SS 2015

Übungsblatt 7, Abgabe am Do. 11.06.15 vor der Vorlesung,
Besprechung in den Übungen am Fr. 12.06.15.

1 Lineare Operatoren (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie folgende Aussagen für die linearen Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$. Verwenden Sie hierbei die abstrakte Definition der Adjunktion und des Skalarproduktes, und nicht die Matrizendarstellungen der Operatoren $\hat{A}, \hat{B}$.

(i) $(c\hat{A})^\dagger = c^*\hat{A}^\dagger, \quad$ für $c \in \mathbb{C}$.

(ii) $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$.

(b) Seien $\hat{x}$ und $\hat{p}$ die Orts- und Impulsoperatoren, welche einen Zustand $|\psi\rangle$, der durch die Wellenfunktion $\psi(x)$ repräsentiert werden kann, auf Zustände abbilden, die durch die Wellenfunktionen $x\psi(x)$ bzw. $-i\hbar\psi'(x)$ repräsentiert werden.

(i) Zeigen Sie, dass der Zustand $\big(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}\big)|\psi\rangle$ proportional zu $|\psi\rangle$ ist und bestimmen Sie den Proportionalitätsfaktor. Können Sie dieses Resultat als eine Operatoridentität schreiben?

(ii) Zeigen Sie $\langle\psi|\hat{x}\chi\rangle = \langle\hat{x}\psi|\chi\rangle$ sowie $\langle\psi|\hat{p}\chi\rangle = \langle\hat{p}\psi|\chi\rangle$ für normierbare Zustände $|\psi\rangle$ und $|\chi\rangle$, indem Sie die Definition des Skalarprodukts als das Integral über die zugehörigen Wellenfunktionen verwenden. Was sagen diese Identitäten über die Hermitizität von $\hat{x}$ und $\hat{p}$ aus?

Bitte Rückseite nicht übersehen.

2 Eigenwertgleichung (7 Punkte)

Der dreidimensionale Vektorraum $\mathcal{H}$ werde durch die Orthonormalbasis $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle\}$ aufgespannt. Über den Operator $\hat{A}$ wissen Sie, dass

$$\begin{aligned}\hat{A}|\psi_1\rangle &= -|\psi_1\rangle + 2|\psi_2\rangle + 2|\psi_3\rangle \ , \\ \hat{A}|\psi_2\rangle &= 2|\psi_1\rangle + 2|\psi_2\rangle - |\psi_3\rangle \ , \\ \hat{A}|\psi_3\rangle &= 2|\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle + 2|\psi_3\rangle \ .\end{aligned}$$

(a) Geben Sie die Matrixdarstellung des Operators an.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte A_n und die dazugehörigen Eigenkets $|\alpha_n\rangle$ für $n = 1{,}2{,}3$. Definieren Sie die Eigenkets so, dass diese ein Orthonormalsystem bilden.

Tipp: Wenn Sie auf ein Polynom dritter Ordnung stoßen, dann hat dieses Polynom eventuell kleine ganzzahlige Nullstellen.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=1}^{3} |\alpha_n\rangle\langle\alpha_n| = \hat{\mathbb{1}} \ .$$

(d) Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=1}^{3} A_n |\alpha_n\rangle\langle\alpha_n| = \hat{A} \ .$$

3 Zwei-Zustands-System (7 Punkte)

Gegeben ist ein System mit zweidimensionalem Zustandsraum. Der Hamiltonoperator $\hat{H}$ und der Operator $\hat{U}$ zur Observablen U haben in der Orthonormalbasis

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Matrixdarstellungen

$$\hat{H} = \varepsilon \begin{pmatrix} 3 & -4i \\ 4i & -3 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{U} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \ ,$$

wobei $\varepsilon > 0$. Was sind die möglichen Messwerte für die Observable U und wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten diese Werte zu messen, wenn sich das System im Grundzustand (d. h. im Energieeigenzustand mit der niedrigsten Energie) befindet?