Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
PD Dr. T. Klose, Dr. F. Loebbert, B.Sc. J. Miczajka

Pk6 Quantenmechanik SS 2015

Übungsblatt 8, Abgabe am Do. 18.06.15 vor der Vorlesung, Besprechung in den Übungen am Fr. 19.06.15.

1 Leibnitzregeln für Kommutatoren (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für beliebige Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$ die Leibnitzregeln gelten:

(a) $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$

(b) $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$

Benutzen Sie diese Regeln, um für zwei Operatoren $\hat{a}_-$ und $\hat{a}_+$, die $[\hat{a}_-, \hat{a}_+] = \mathbb{1}$ erfüllen, folgende Formeln herzuleiten:

(c) $[\hat{a}_-, \hat{a}_+^n] = n\hat{a}_+^{n-1}$, wobei $\hat{a}_+^n$ das n-fache Produkt ($n \in \mathbb{N}$) von $\hat{a}_+$ mit sich selbst ist.

(d) $[\hat{a}_-, f(\hat{a}_+)] = f'(\hat{a}_+)$, wobei f eine Funktion ist, die um Null in eine Taylorreihe entwickelt werden kann, und f' deren Ableitung bezeichnet.

2 Drei-Zustands-System (8 Punkte)

Betrachten Sie das abstrakte System mit den drei normalisierten Zuständen

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad |3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

sowie dem Hamiltonoperator $\hat{H}$ und einem weiteren Operator $\hat{A}$:

$$\hat{H} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hier sei $\varepsilon > 0$.

(a) Finden Sie die drei Energieeigenwerte des Systems.

(b) Zeigen Sie, dass $[\hat{H}, \hat{A}] = 0$.

(c) Finden Sie die normalisierten Eigenzustände von $\hat{H}$ und $\hat{A}$.

(d) Definieren Sie einen Operator $\hat{B}$ zur Observablen B, so dass B im Zustand $|k\rangle$ den Wert k hat (für $k = 1{,}2{,}3$). Was ist im Zustand niedrigster Energie die Wahrscheinlichkeit, dass $B = 1$ ist?

(e) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Messung zur Zeit $t = \hbar\pi/\varepsilon$ den Wert $B = 3$ ergibt, wenn B bei $t = 0$ den Wert 1 mit Wahrscheinlichkeit 1 hatte?

3 Kommutierende Operatoren und gemeinsame Eigenvektoren (7 Punkte)

Gegeben sind zwei hermitesche Operatoren mit den Matrixdarstellungen

$$\hat{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{B} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

(a) Berechnen Sie die Eigenvektoren und die zugehörigen Eigenwerte beider Operatoren. Vergleichen Sie, ob einer oder mehrere der von Ihnen gefundenen Eigenvektoren von $\hat{A}$ identisch mit denen von $\hat{B}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$. Was sagt diese Eigenschaft über die Eigenvektoren von $\hat{A}$ und $\hat{B}$ aus?

(c) Falls nicht zufällig alle Eigenvektoren in (a) paarweise gleich waren, definieren Sie geeignete Linearkombinationen der Eigenvektoren, so dass Sie am Ende eine gemeinsame Eigenbasis für $\hat{A}$ und $\hat{B}$ erhalten.